

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. STREEFKERK, P. WIJDENES,
Dr H. A. GRIBNAU VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

JUBILEUM-NUMMER

TER GELEGENHEID VAN
DE 70^E VERJAARDAG VAN
DR H. J. E. BETH



25^E JAARGANG 1949/50
NR. 5
VERSCHENEN 5 JULI 1950

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. STREEFKERK, P. WIJDENES,
Dr H. A. GRIBNAU VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

JUBILEUM-NUMMER

TER GELEGENHEID VAN
DE 70^E VERJAARDAG VAN
DR H. J. E. BETH



25^E JAARGANG 1949/50
NR. 5
VERSCHEENEN 5 JULI 1950

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN



Dr H. J. E. BETH

1880 5 Juli 1950

Dr H. J. E. BETH

70 jaar op 5 Juli 1950.

In September 1899 werd Beth „1e jaars” in wis- en natuurkunde aan de Universiteit van Amsterdam; de wiskunde werd gegeven door de professoren Korteweg en Van Pesch; ik volgde dezelfde colleges als „toehoorder”; noch voor de professoren; noch voor de studenten naar ik meen, maakte dat enig verschil.

We hebben elkaar dus meer dan een halve eeuw geleden voor het eerst ontmoet en sinds dien niet uit het oog verloren. 1 Febr. 1902 werd ik leraar in Almelo; Beth kwam aan die school in 1906; toen dus collega's; slechts voor een jaar, toen ik naar Rotterdam ging. Beth bleef, werd er directeur, verwisselde zijn standplaats voor Deventer, later voor Amersfoort. We bleven met elkaar in contact; hij schreef menig artikel in het Nieuw Tijdschrift voor wiskunde, meer nog in „Euclides”. We kwamen en komen bij elkaar aan huis, zeker ook tot verheugenis van onze vrouwen.

Beths vriendschap stel ik op hoge prijs en ik spreek de hoop uit, dat ons nog menig jaar beschoren moge zijn om die te koesteren.

Toen prof. Visser mij op 25 Febr. 1950 op de vergadering van het Wiskundig Genootschap aanschoot met: „Beth wordt gauw 70; voelt U er iets voor om een nummer van Euclides aan Beth te wijden?” was het prompte antwoord: „natuurlijk; komt hem dubbel en dwars toe” of iets van dezelfde strekking. — Prof. Visser heeft verder de leiding gehad: het aanschrijven van de heren, die met hun bijdragen dit nummer vullen; bijdragen van zijn vrienden, die getuigen van de bewondering voor wat Beth met zijn zeldzame gaven en volhardende ijver voor de wetenschap en het onderwijs heeft gedaan; Beth, een waardig vertegenwoordiger van het Nederlandse volk in de eerste helft van de twintigste eeuw.

3 Mei, 1950.

P. W.

Dr H. J. E. BETH

Het is haast wel overbodig de verdiensten van Dr H. J. E. Beth, oud-directeur der Rijks Hogere Burgerschool te Amersfoort, voor het Middelbaar Onderwijs te omschrijven, omdat die zo algemeen bekend en erkend zijn, dat het voor de huidige meelevende mensen niet nodig is daar veel woorden aan te besteden.

Voor het nageslacht is dit evenwel *niet* overbodig en deswege zal dan ook in dit „Beth-nummer” van Euclides wel aandacht worden geschonken aan wat Beth heeft gedaan voor het Middelbaar Onderwijs door zijn leerboeken, door zijn werk in de Vereniging van Directeuren, door zijn arbeid op wiskundig gebied o.a. in de „Commissie-Beth”, die een nieuw leerplan voor het onderwijs in de Wiskunde op de H.B.S. ontwierp, maar hier mag ik dankbaar memoreren, wat Beth heeft gedaan in alle stilte, in alle geheimzinnigheid zelfs, zodat onze samensprekingen in het huis aan de Groen van Prinstererlaan te Amersfoort wel leken op het organiseren van een samenzwering, voor de voorbereiding der eind-examen opgaven H.B.S. voor het vak Wiskunde, waaraan hij met grote bekwaamheid en toewijding zijn medewerking heeft verleend. Daarvoor moge hem hier nog publiekelijk dank worden gebracht.

Gaarne voeg ik daar de wens aan toe, dat Beth nog moge blijven doorwerken op het voor hem zo vertrouwde terrein der Wiskunde en dat nog de vruchten van deze arbeid in zijn levensavond mogen blijven getuigen van zijn bekwaamheid en werklust en niet minder van zijn grote liefde tot de Mathesis, die hij niet maar heeft beoefend om het welbehagen van zich zelf, maar om de waarde en de betekenis er van te demonstrenen voor de geestesvorming der jeugd in het onderwijs, waaraan hij zijn leven heeft gewijd.

J. VAN ANDEL,
Oud-inspecteur der Lycea.

Dr H. J. E. BETH .

1880 — 5 Juli — 1950.

Wie zich op de taak bezint een overzicht te geven van het werk van Hermanus Johannes Elisa Beth, zou zich enige geschenken willen toewensen, die deze zelf in zo hoge maat bezit: het vermogen om zelfstandig en op korte termijn problemen te doorzien en feiten te begrijpen, de intuïtie om uit een veelheid van gegevens het wezenlijke te ziften, de gave om van inzicht en gevoel te getuigen in heldere, zakelijke en levendige stijl. Een ogenblik komt de gedachte op dat niemand beter dan Beth zelf de taak zou kunnen vervullen, maar de gevolgtrekking zou niet alleen een ongebruikelijke toestand scheppen, maar ook onbillijk en averechts zijn. Onrechtvaardig omdat zij zijn vele vrienden de gelegenheid zou roven om, in stede van te vragen en te ontvangen, hem althans op zijn zeventigste verjaardag iets te bieden, al ware het slechts een woord van bewondering en dank. Maar ook onjuist, want niemand zou de taak slechter vervullen dan Beth zelf; men zou hem alles willen toevertrouwen behalve dit ene, want deze man is dermate bescheiden en alle zelfverheffing is hem zo verre, dat zijn eigen oordeel over het werk in geen verhouding zou staan tot de ware betekenis.

Dit werk treft ons allereerst door zijn veelheid en zijn veelzijdigheid. Beth is een wiskundige van hoge rang, een fijnzinnig kenner van de geschiedenis der mathesis, een uitnemend docent, en door woord, geschrift en boek veler leermeester; hij heeft door zijn gezag en zijn daadwerkelijke bemoeienis gedurende dertig jaren een grote invloed gehad op het middelbaar-wiskundeonderwijs in ons land.

Alleen de laatste omstandigheid zou reeds de hulde rechtvaardigen, die hem thans wordt gebracht en het is geen toeval dat het tijdschrift *Euclides*, gewijd aan de didactiek der exacte vakken, aller waardering verzinnebeeldt in de feestgave, die thans voor ons ligt.

Hoewel het werk van Beth in wezen een eenheid vormt en gedragen wordt door zijn grote liefde voor de wetenschap der wiskunde en door de drang hiervan te getuigen, lijkt het om redenen

van ordening wenselijk de verschillende aspecten van zijn geestesarbeid afzonderlijk te beschouwen. Zijn oeuvre is overigens zo rijk en zo verscheiden, dat een bespreking niet anders dan oppervlakkig en onvolledig kan zijn.

Als wiskundige is Beth in de eerste plaats een meester op het terrein der klassieke theoretische mechanica, waarbij zijn belangstelling vooral uitgaat naar de theorie der kleine trillingen van mechanische systemen en naar de vlakke en ruimtelijke kinematica. Zijn onderzoekingen van meetkundig en algebraïsch karakter hangen dikwijls met deze onderwerpen samen. Een psycholoog zou zich misschien afvragen in hoeverre de genegenheid van Beth voor de mechanica samenhangt met zijn karakter (daarbij bedenkend dat het vak zowel de statica als dynamica omvat), maar naar de aanleiding voor deze voorkeur behoeven wij niet te gissen. Toen de jonge Beth, die de H.B.S. te Schiedam en te Haarlem had bezocht, en in 1897 het eindexamen had afgelegd, zich aan de Gemeentelijke Universiteit van Amsterdam liet inschrijven, waren het de zo wel verzorgde lessen van Korteweg, die de meeste indruk op hem maakten, zijn denken richting gaven en hem deden groeien tot des meesters meest eigenlijke leerling. Zo ging ook de belangstelling voor de mechanica op Beth over en daar trouw een der kenmerken van zijn wezen is, zal hij zijn leven lang dit vak bewonderend dienen en er steeds naar terugkeren. Dezelfde wezens-trek bepaalde zijn gevoelens voor de leermeester, van wie hij, samen met zijn vriend Van der Woude, voor het Jaarboek der Koninklijke Academie van Wetenschappen het *Levensbericht* schreef (ook opgenomen in *Euclides*, 23, 153—165, 1948), waarvan de warme toon getuigt van beider eerbied voor de nestor der nederlandse mathematici.

Het was ook op instigatie van Korteweg, dat Beth de dissertatie schreef, waarop hij in 1910 de doctorstitel verwierf. Het proefschrift draagt de langademige titel: *De schommelingen om een evenwichtsstand bij het bestaan eener eenvoudige lineaire relatie tusschen de reciproke waarden der perioden, met toepassing op de beweging, zonder wrijving, van een zwaar punt op den bodem eener vaas*. In 1897 had Korteweg de trillingen om een evenwichtsstand onderzocht van willekeurige mechanische systemen en zich daarbij niet bepaald tot de lineaire termen der krachtfunctie, maar met de methode der successieve approximaties reeksontwikkelingen aan-gegeven voor het algemene geval. Het bleek dat deze reeksen zinloos worden, indien tussen de hoofdfrequenties n_i van het stelsel een betrekking $\sum p_i n_i = 0$ bestaat, met gehele (positieve of negatieve)

coëfficiënten p_i , althans wanneer $\Sigma |p_i| \leq 4$. De moeilijkheden zijn vergelijkbaar met die, welke in de storingstheorie der planetenbeweging kunnen optreden. Beth onderzoekt nu uitvoerig, voor systemen met twee vrijheidsgraden, deze uitzonderlijke mechanismen en geeft een volledige oplossing van het probleem. Zijn hulpmiddelen (theorie der differentiaalvergelijkingen, methode van de variatie der constanten, elliptische functies) zijn uiteraard ontleend aan de klassieke analyse, maar daarnevens toont hij belangstelling voor meetkundige vragen in zijn onderzoek van stelsels van zogenaamde osculerende banen. Achteraf gezien zou men in het eerste geschrift van Beth reeds een aankondiging kunnen lezen van de methode, die hij in de toekomst bij zijn wetenschappelijk werk zou volgen: een gemengde methode, waarbij het analytische onderzoek voortdurend geïllustreerd wordt met en ook herhaaldelijk vervangen wordt door een meetkundige redenering. Deze stijl maakt de lectuur van zijn werk aantrekkelijk, ook voor wie zelf meer eenheid van behandeling nastreeft. In de kinematica zou hij later, als meester op meer wapens, op deze wijze zeer veel bereiken. Volgt men het werk van Beth in chronologische orde, dan lijkt in het algemeen het analytisch karakter steeds meer te wijken voor een directe meetkundige beschouwing; de formule treedt terug ten bate van een hoog ontwikkeld meetkundig vakmanschap, dat geen schroom gevoelt tegenover infinitesimale onderzoeken. De bewonderenswaardige intuïtie, die Beth daarbij toont, staat in steile tegenstelling tot zijn eigen uitspraak (bij een waarde-oordeel van de beschrijvende meetkunde) dat zijn meetkundig voorstellingsvermogen zeer matig zou zijn. Naar ik meen wordt hij, althans sinds het heengaan van Schaake, op het gebied van de directe meetkundige betoogtrant, in ons land door niemand geevenaard. Het gemak, waarmee Beth in differentiaalmeetkundige kwesties tot de oplossing komt, wekt bij zijn wiskundige vrienden wel eens een gevoel van onbehagelijke ongerustheid en het is mij bekend, dat bij sommigen het zweem van licht wantrouwen aanleiding gaf tot pogingen om hem langs de weg der berekening te controleren; het gevolg was echter veelal dat zij achteraf stil zwegen.

Een aantal qualiteiten, die wij thans in Beth bewonderen, komen dus reeds in zijn proefschrift tot uiting; nochtans niet alle. Het is vrij gebruikelijk dat een wiskundige promovendus, die tevens leraar is, in zijn stellingen om welke redenen dan ook uitspraken opneemt over de didactiek van zijn vak. Geen enkele der door Beth ter verdediging aangeboden thesen zou echter doen verwachten, dat de jonge doctor op onderwijsgebied eens de betekenis zou krijgen, die wij allen kennen.

Het onderwerp der dissertatie zou Beth nog een aantal jaren bezighouden. Hij publiceerde zijn onderzoekingen over de kleine trillingen in de *Verslagen* der Koninklijke Academie van Wetenschappen (1910, 1911), de *Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles* (1910, 1912) en het *Philosophical Magazine* (1913) en sprak er over op het Nederlandsch Natuur- en Geneeskundig Congres in 1913; een afzonderlijk artikel verscheen nog over de omhullende der osculerende krommen (1914).

Inmiddels was Beth reeds die waarlijk unieke serie onderzoekingen begonnen, die tot heden niet is beëindigd. De lezer begrijpt, dat ik doel op zijn bemoeiingen met de prijsvragen van het *Wiskundig Genootschap* en de ongeevenaarde successen, die hij met zijn ingezonden oplossingen boekte. Het Genootschap schrijft elk jaar vragen uit; het aantal inkomende antwoorden is altijd gering en het tiental bekroningen, nodig om het praedicaat *lid van verdienste* te verwerven, wordt slechts bij zeer hoge uitzondering bereikt. Wij laten hier de trotse rij van jaren volgen, waarin aan Beth een bekroning ten deel viel: 1912, 1915, 1918, 1919 (tweemaal), 1923, 1924, 1925, 1927, 1929, 1932, 1938 (tweemaal). Vele dezer antwoorden zijn uitvoerige geschriften; de meeste werden later in periodieken gepubliceerd en vormen het hoofdbestanddeel van zijn in artikelvorm verschenen wetenschappelijk werk. Ziet men een ogenblik af van de intrinsieke waarde van de prestatie en de enorme werkkraft, die er uit blijkt, dan blijft nog steeds het merkwaardige feit bestaan, dat Beth bij voortduring behagen schepte in de beantwoording van door anderen gestelde problemen, een toestand die naar ik meen zeer zelden voorkomt. In zekere zin zijn zijn publicaties gelegenheidsgeschriften, evenals de verzen van Goethe (naar diens eigen uitspraak) alle gelegenheidsgedichten waren. In de keuze van zijn studieobjecten vertoont Beth aldus een zeer originele onoorspronkelijkheid en blijkbaar was het *Programma der jaarlijkse prijsvragen* de leidraad bij zijn werk. De bekroningen zullen hem uiteraard voldoening hebben geschonken, maar wie Beth kent verwerpt spoedig de gedachte, dat het eerezucht was die hem bewoog. Eerder zie ik de verklaring (zo men die nodig acht) in de omstandigheid dat hij iemand is, die zelden een weigerend antwoord geeft als men een beroep op hem doet en ik waag het gekunstelde vermoeden, dat hij de Commissie voor de Prijsvragen gaarne ter wille was. Hij zelf is geneigd de waarde der prestatie te verlagen door te zeggen, dat er vaak vragen werden gesteld, die wel voor hem bijzonderlijk bedoeld schenen. Hoe het zij, door zijn opvallende verrichtingen verwierf Beth, zelfs buiten

de kring der vakgenoten een bijzondere faam. De eerste maal dat ik zelf, thans dertig jaren geleden, zijn naam hoorde noemen, gebeurde dat met een toespeling op zijn bekroningen, door een medestudent, uit het Oosten des lands, die met trots vertelde dat hij op het staatseindexamen door een zo geleerd man was onderzocht en een jaar later was ik de stille getuige van een gesprek in de trein tussen twee van zijn oud-leerlingen, die door de eerbiedige wijze, waarop zij over doctor Beth spraken een indruk gaven van zijn welhaast legendarische vermaardheid.

Een deel van zijn werk is van meetkundige aard. Zo onderzocht hij in 1920 de projectie op een asdoorsnede van een op een omwentelingskegel gelegen kromme, die bij ontwikkeling van de mantel overgaat in een cirkel, terwijl in 1922 uitvoerige beschouwingen werden gewijd aan de ruimtelijke hoek waaronder men een n -dimensionale hyperellipsoïde ziet uit een punt van haar R_n . In 1937 leverde hij (onder het motto „Bagatel”) een elegante lineaire constructie van de bij negen rechten in R_4 behorende kern, dat wil zeggen van het punt, waaruit de rechten op elke R_3 geprojecteerd worden volgens negen rechten, die tot een lineair complex behoren. Van gemengd algebraïsch-meetkundige aard is zijn verhandeling van 1924 over een discriminantenoppervlak van de vierdegraads vergelijking; hij brengt daarbij, in afwijking van een door Kronecker gevolgd procédé, de vergelijking in de vorm

$$u^4 + xu^3 + yu^2 + zu + 1 = 0,$$

interpreteert de coëfficiënten x , y , z als rechthoekige coördinaten van een driedimensionale ruimte en geeft een interessante meetkundige discussie over de aard van de wortels.

Andere artikelen behoren tot de dynamica. In 1914 onderzocht hij in zijn antwoord op een prijsvraag (waarbij ook de oplossingen van Bone en van Wolff werden bekroond) in een gegeven vlak krachtveld die tautochronen, waarvan de periode is voorgeschreven. Tot de theorie der kleine trillingen keert hij terug in 1918 bij zijn bepaling van de principale slingeren onder invloed van de zwaartekracht van een vast lichaam, waarvan drie punten op gegeven afstanden van vaste punten moeten blijven. Een van zijn meest belangrijke stukken acht ik het artikel in *Philosophical Magazine* van 1925, waar hij de stelling van Thomson en Tait: een systeem met een *oneven* aantal labiele vrijheidsgraden kan niet door een gyroscopisch krachtsysteem worden gestabiliseerd, aanvult met de positieve uitspraak: bij een *even* aantal labiele vrijheidsgraden is deze stabilisatie steeds mogelijk.

Zijn grootste triomfen vierde Beth op het gebied der kinematica, waar hij evenals Van der Woude en in wisselwerking met deze, baanbrekend werk heeft verricht. Zijn kennis op dit terrein, die veel omvattend is, berust niet op uitvoerige literatuurstudie, maar op zelfstandig, men zou zeggen autodidactisch verkregen inzicht, waarbij hij genoeg heeft aan de beginselen, die hij van de franse klassieken uit het laatste kwart der negentiende eeuw Mannheim, Darboux en Koenigs heeft geleerd. Steeds streeft hij er naar het eventuele rekenwerk te „doorzien” en door aanschouwelijk begrip te vervangen en voor al dit werk zou het citaat uit Poinsoot kunnen gelden, dat hij een van zijn oplossingen meegaf: „*on voudrait l'observer et le suivre, pour ainsi dire, des yeux*”. Wij kunnen niet meer doen dan een opsomming geven van de betreffende publicaties. Uitvoerig onderzoekt hij in 1917 de beweging van een rechte, waarvan drie punten in gegeven vlakken moeten blijven; van 1920 dateert een lezenswaardig opstel over de rationale algebraïsche bewegingen (vooral van de derde en de vierde graad) van een vast stelsel met één vrijheidsgraad; het onderzoek wordt met een geheel geometrische methode in 1925 voortgezet, waarbij Beth de grote betekenis doet kennen van het door hem ontdekte begrip der *isotrope posities* van een bewegend vlak. In verschillende onderzoeken houdt hij zich daarna, in aansluiting op Van der Woude, bezig met de vlakke en ruimtelijke beweging met twee vrijheidsgraden (1928, 1930), waarbij de behandeling van een door Bricard gesteld probleem genoemd en geroemd moge worden als een karakteristiek voorbeeld van zijn denkwijze bij dergelijke vragen. Met het onderwerp hangt samen het bepalen van de kromtemiddelpunten van stelsels richtkrommen van holonome ruimtelijke bewegingen met drie vrijheidsgraden. Ten slotte heeft Beth nog een tweetal stukken gewijd aan een kinematische afbeelding, die door Study is voorgesteld; daarbij wordt elke positie der ruimte afgebeeld op een punt van een V_6^2 in R_7 zodat bewegingen van één vrijheidsgraad corresponderen met deze variëteit gelegen krommen.

Op fraaie wijze laat Beth zien dat de beschouwing van de meest voor de hand liggende krommen terugvoert naar bekende, langs geheel andere weg verkregen bewegingen van de ruimte. Ook hier geeft het begrip der isotrope posities veel steun aan het betoog; zeer verdienstelijk is voorts de overzichtelijke classificatie der bewegingen, waartoe de afbeelding aanleiding geeft. Bij al deze laatstgenoemde publicaties sluit zich een boek aan, dat Beth in de oorlogsjaren voltooide en in 1949 in het licht gaf, zijn *Kine-*

matica in het platte vlak. Als inleidend leerboek voor het vak achtte de kritiek het te zwaar en te geserreerd van vorm, maar als wetenschappelijk geschrift waardeerden de recensies het als een geslaagde poging om de elementaire planimetrische kinematica van hoger standpunt te beschouwen. Ook hier is de afbeelding der ∞^3 posities van het vlak, en wel op de punten van R_3 , het leidende beginsel.

Wij gaan thans over naar een ander, eveneens boeiend aspect van Beth's werkzaamheid, namelijk zijn prestaties op historisch terrein. Zien wij af van een eenvoudig en populair geschriftje over *Het probleem der gravitatie* (1948), dan vragen twee uitvoerige werken onze aandacht. Beide verschenen in *Noordhoffs Historische Bibliotheek voor de Exacte Wetenschappen* en zullen wel ontstaan zijn als gevolg van de invloed van Dijksterhuis met wie Beth inmiddels intensief op ander terrein had samengewerkt. Maar als hij de opwekking of de aandrang van onze grootste historicus der wiskunde als een opdracht heeft aanvaard, dan geschiedde de uitvoering daarvan geenszins uit louter plichtsbesef, want zoals hij mededeelt in het voorbericht van de *Inleiding in de Niet-Euclidische Meetkunde op historische grondslag* (1929), was het „een taak, wier vervulling (hem) gedurende enkele jaren een rijke bron van geestelijk genot is geweest”. De geschiedenis te schrijven van de worsteling van de menselijke geest met het parallellen-postulaat is een dankbare opgave en weinig mathematici zullen onvatbaar zijn voor de bekoring van de over vele eeuwen zich uitstrekkende ontwikkeling, die in de achttiende en negentiende eeuw met grote versnelling haar hoogtepunt bereikt. Twijfel en onvrede bij de Grieken, primitieve en scherpzinnige pogingen het postulaat te bewijzen, de vernuftige inval de methode van het indirecte bewijs toe te passen, het constateren van vermeende tegenstrijdigheid op grond van onaanvaardbaar schijnende consequenties, de doorbraak van de geniale gedachte om de aanvankelijke doelstelling los te laten en het nieuwe meetkundige systeem als een logisch geheel te aanvaarden, de objecties van het wijsgerig conservatisme, de apotheose wanneer blijkt dat de niet-Euclidische meetkunde een eleganter en gevulder systeem is met de klassieke geometrie als gedegenerieerd grensgeval. Welk een rijke en vooral ook: wat een waarlijk menselijke ontwikkeling. Beth schrijft deze historie met liefde en overgave en sluit haar af met beschouwingen over de school van Riemann, de groepentheoretische opvatting van Klein en de moderne axiomatica. Hij had het voordeel te kunnen beschikken over de uitgebreide literatuur over het onderwerp, waarover wij sinds Engel en Stäckel beschikken en weet de veelomvattende stof samen te vatten tot een boeiend en zeer leesbaar geheel.

Zo er nog een bewijs nodig was voor Beth's bijzondere werkracht, dan zou het feit kunnen gelden, dat hij slechts enkele jaren later een boek in twee delen voltooide, dat naar onze mening van zijn prestaties op historisch terrein de kroon draagt: Newton's „*Principia*” (1932). Een zeer oorspronkelijk werk, dat slechts doordat het in de landstaal verscheen de internationale verspreiding heeft ontbeerd, dat het in elk opzicht verdient. Met grote zorgvuldigheid heeft Beth zich verdiept in de gedachtengang van de grondlegger van zijn geliefde mechanica. Door zijn bijzonder geslaagde opzet en een uitstekende compositie brengt het de lezer op aantrekkelijke wijze in de sfeer van Newton's denkwijze en van de ontwikkeling van zijn ideeën; het laat Newton zelf spreken en legt uit en licht toe zonder af te dwalen, het is zakelijk en objectief tegen een achtergrond van onuitgesproken bewondering. Wie het boek leest, krijgt het gevoel, dat Beth naast hem staat en op rustige wijze de *Principia* samen met hem bestudeert, hier vertalend, daar samenvattend en verduidelikend. Met groot vertrouwen geeft men zich aan hem over en men luistert aandachtig, als hij het boek telkens even laat rusten en uit de volheid van zijn kennis vertelt hoe het vóór Newton was, en hoe het later verder ging. Zorgvuldig analyseert hij de grondslagen, die in de drie wetten worden gelegd, maar nergens vermoeit hij door te grote uitvoerigheid en de taal blijft licht en helder, of hij nu het *Scholium* aangaande Ruimte en Tijd bespreekt, de planetenbeweging en de storingstheorie, dan wel de ontwikkeling der infinitesimaalrekening. Met dit werk heeft Beth onze literatuur over de historie der exacte wetenschappen zeer veel rijker gemaakt.

Uit bovenstaande is kunnen blijken, dat wij in Beth een wiskundige van grote en veelzijdige bekwaamheid bezitten. Dat hij meer is dan een geleerde, zijn maatschappelijke carrière (maar dit woord past in het geheel niet bij deze mens) is daar om het te bewijzen. Na zijn doctoraal-examen in 1904 gaf hij les aan enige scholen in Amsterdam en Baarn en werd daarna in 1906 leraar aan de H.B.S. te Almelo, waar Wijdenes één van zijn collega's werd. Reeds zes jaar later werd hij aan dezelfde school tot directeur benoemd en daarna voelde hij blijkbaar periodiek een drang naar het westen, want hij wisselde deze functie achtereenvolgens voor het directoraat der Rijks Hogere Burgerscholen te Deventer (1922—1935) en Amersfoort (1935—1946). Als leider van een school was Beth een krachtige persoonlijkheid, die weinig tijd besteedde aan administratieve beslommingen en papieren maatregelen, in grote evenwichtigheid zijn beslissingen nam, aller waar-

dering verwierf door zijn rechtvaardigheid, in principiële zaken onverzettelijk was en die het geschenk heeft ontvangen om de betrekkelijkheid van vele dingen te kunnen ervaren in het licht van een milde humor. Beth is een man van natuurlijke eenvoud en alle gewichtigheid is hem vreemd, hij is tegemoetkomend en tot inschikkelijkheid bereid, maar ook zo nodig zeer onafhankelijk in oordeel en houding. Hij spande zich niet in om de ontwikkeling te bevorderen van wat men soms „de bloei” van een school noemt, een verschijnsel dat te maken heeft met veel leerlingen en veel geslaagden met veel vrijstellingen.

Meer dan eens heeft Beth mij verzekerd, dat de aantrekkelijkste kant van het directoraat deze is, dat men ook nog les mag geven en hij acht die op school doorgebrachte uren het gelukkigst, waarin hij voor de klas stond. Van de indrukken die zijn onderwijs maakte, zouden zijn leerlingen moeten getuigen, maar als men meer dan eens een voordracht van Beth heeft bijgewoond kan men zich daarvan wel een voorstelling maken. Ik herinner mij zeer goed de eerste maal dat ik hem zag en hoorde, vijftientig jaar geleden, de hoofdzaken rustig en onopgesmukt belichtend, met slechts innerlijke geestdrift, echt.

De invloed van Beth als leraar is niet tot zijn leerlingen in engere zin beperkt gebleven. In de loop van de tijd schreef hij, gedeeltelijk in samenwerking met anderen een reeks van boeken voor het middelbaar onderwijs. Een der oudste is zijn *Beknopt Leerboek der Cosmographie* (1922), later gevolgd door zijn *Leerboek der Cosmographie* (1933); zeer bekend en veel gebruikt is de in samenwerking met Wijdenes tot stand gekomen *Nieuwe School-algebra*, waarin met een gegroeid traditionalisme wordt gebroken, maar anderzijds de moderne inzichten met wijze gematigdheid worden toegepast. Een zelfde streven is vast te stellen in de met Van Loo geschreven *Mechanica* (1933; 6e druk 1948), dat naar ik meen een invloed ten goede heeft gehad (en nog kan hebben) op het onderwijs in dit vak, doordat het vele verjaarde opvattingen en onverantwoorde vaagheden en onnauwkeurigheden radicaal wegschuift en in bondige vorm de voor de mechanica wezenlijke moeilijkheden niet verdoezelt maar op heldere wijze op de voorgrond plaatst. Minder succes had zijn *Meetkunde van de ruimte* (1935), een praktische toelichting op de door Beth gepropageerde gedachte om tussen stereometrie en beschrijvende meetkunde een fusie tot stand te brengen.

Een ander werk van Beth trok de aandacht, zijn *Inleiding tot de differentiaal- en integraalrekening* (1934) dat een leerboek

wil zijn voor ieder die met welk oogmerk ook, een niet te oppervlakkige kennis van de infinitesimaalrekening behoeft. Hoewel het uiteraard wiskundig volkomen verantwoord is, legt het de nadruk op de uitgebreide toepasbaarheid, die het met een reeks van gelukkig gekozen voorbeelden illustreert. Was dit werk voor het hoger onderwijs bestemd, de schrijver zelf zou tot zijn pensionnering aan het middelbaar onderwijs verbonden blijven en in dit opzicht doet de loop van zijn leven denken aan dat van Grassmann en van Schubert. Omstreeks 1920 moest hij het aanbod van een leerstoel te Bandoeng om verschillende redenen afslaan. Na de laatste oorlog had de Technische Hogeschool te Delft het voorrecht Beth bereid te vinden een leeropdracht te aanvaarden. Hij gaf en geeft colleges in verschillende wiskundige vakken en in zijn geliefde theoretische mechanica; door zijn veelzijdigheid en de vanzelfsprekendheid, waarmee hij de door de omstandigheden steeds wisselende taak vervult, is hij Delft in moeilijke jaren een grote steun en de wijze, waarop hij met zijn collega's samenwerkt en zijn werk verricht doen vermoeden, dat de plichten, die hij aan de avond zijns levens op zich heeft genomen, ook hem zelf voldoening schenken.

Toen Beth directeur was van de H.B.S. te Deventer, had hij nauw contact met inspecteur Jensema en na zoveel jaren mag men de lang gefluisterde onderstelling, dat hij een grote invloed had op de samenstelling der jaarlijkse eindexamenopgaven wel hardop herhalen. Het was voor het wiskunde-onderwijs een tijd van gisting en van tumult; de waardering was of scheen dalend, de H.B.S.-A kwam tot stand, in de kring der leraren zelf ontstonden defaitistische tendenties, er groeide twijfel aan de zin van het vak en onvrede met resultaten die niet evenredig schenen met de gegeven en de geeiste inspanning. Het is voor het middelbaar onderwijs van zeer grote betekenis geweest, dat in die tijd uit de gelederen der wiskunde-docenten twee figuren naar voren traden, die ongeschokt waren in hun overtuiging van de onvergankelijke waarde van goed wiskunde onderwijs en die de gaven bezaten daarvan met welversneden pen en welsprekend woord te kunnen getuigen: Beth en Dijksterhuis. Herlees het artikel van Beth in de eerste jaargang van dit tijdschrift, over *Het „meer en meer wiskundig” karakter der H.B. school met 5-jarigen cursus* (1924) — en gij zult ervaren dat hij zijn verontwaardiging kon uiten in een gepantserd betoog en met spitse ironie. Maar hij boort dieper en legt zich de vraag voor of het wiskunde-onderwijs niet zelf schuld heeft aan de reacties doordat het in sleur en conservatisme is bevangen. En zo kon hij aan het eind van *Wiskunde en afgodsdienst* (1926) schrijven:

„Deze tijd is voor het wiskunde-onderwijs aan onze scholen vol gevaren. Het zal die te boven kunnen komen, als men wil inzien, dat veel wiskunde onderwijs dat thans gegeven wordt, met voordeel kan worden gemist, en er dus inderdaad met betrekking tot het wiskunde onderwijs van afgodsdienst kan gesproken worden, enz.” Welnu, Beth kreeg gelegenheid in dit opzicht positief werk te verrichten; hij werd voorzitter van de verder uit Dijksterhuis, Van Andel en Cramer bestaande commissie, ingesteld door het College van Inspecteurs en belast met een onderzoek naar de toestand van het wiskundeonderwijs en met het doen van wijzigingsvoorstellen. In 1926 was de Commissie met haar studie gereed en deed zij het ontwerp van een leerplan verschijnen, met een uitvoerige toelichting. Het is hier niet de plaats om de gevoelens te schetsen, die de voorstellen in het corps der wiskunde-docenten opwekten, te minder waar de schriftelijke polemieken voor een belangrijk deel in dit tijdschrift hebben plaats gevonden. Beth heeft in deze jaren ten behoeve van het middelbaar onderwijs buitengewoon veel werk verricht; in vele bijeenkomsten van wiskundeleraren lichtte hij de plannen toe en zijn rustige, weloverwogen verdediging kon veel misverstaan wegnemen. Uit de schriftelijke gedachtenwisseling halen wij slechts één punt naar voren, dat voor Beth typerend is. In het concept-leerplan was een grote plaats toegewezen aan de infinitesimaalrekening en men bracht nu, niet zonder gerechtvaardigde ironie, een vroegere uitspraak van Beth in het geding, waarbij hij zich tegen de invoering van dit vak op de H.B.S. had verklaard. De betrokkene aarzelde niet alleen geen ogenblik om de wijziging van standpunt volmondig toe te geven, maar deed dat vergezeld gaan van een ook nu nog lezenswaardige analyse van het innerlijke proces, dat hem tot de andere opvatting had geleid.

Hoewel de invoering van het door de Commissie voorgestelde leerplan om verschillende redenen niet is verwekelijkt kan men zeker vaststellen dat het werk van Beth en de zijnen niet zonder grote invloed is geweest op het wiskunde-onderwijs hier te lande. Maar hoewel Beth sinds die jaren op dit terrein een gezag bezit door niemand overtroffen, kan men zich niet aan de indruk onttrekken, dat zijn omvangrijke werkzaamheid voor onderwijs-reorganisatie niet meer dan een phase in zijn leven heeft betekend en het lijkt geen toeval, dat in de volgende periode, en misschien als een zekere reactie, de historische werken van zijn hand verschenen, waarvan boven sprake was. Maar toch keert hij telkens weer tot didactische kwesties terug en vele artikelen in dit tijdschrift

getuigen van zijn onverminderde belangstelling voor dat wat Euclides nastreeft. Een volledige opsomming lijkt overbodig; laat ons vermelden zijn *Eenvoudige beschouwingen uit de meetkunde van Gausz* (1927), *Het experimenteel georiënteerde onderwijs in de mechanica* (1928), *De behandeling der complexe getallen* (1928), *De ontwikkeling van het getalbegrip bij het Middelbaar en Voorbereidend Hoger onderwijs* (1928), *Over examenopgaven* (1930), *De denkmoelijkheden gelegen in het functiebegrip en in de grafische voorstellingen* (1932), *Het twijfelachtige geval* (1931), *Het eerste hoofdstuk der stereometrie* (1930), zijn Congresrede: *Enkele beschouwingen inzake het meetkunde onderwijs* (1934), *Het nieuwe leerplan voor Wiskunde* (1937), *Iets uit de didactiek der wiskunde* (1939), *Een meetkundige plaats met een historische betekenis* (1948) en een groot aantal kleinere bijdragen en boekbesprekingen. Ook aan het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* verleende hij medewerking, o.a. door een uitvoerig vervolgartikel *Over Meetkunden* (jrg. 34, 36, 37), terwijl dit jaar in het *Algemeen Nederlands Tijdschrift voor Wijsbegeerte en Psychologie* een historische studie het licht zag over *Descartes als Wiskundige* (42, 1950, 134—144).

Het bovenstaande heeft nauwelijks meer kunnen zijn dan een overzicht van het vele, dat Beth tot stand heeft gebracht. Dit vervult ons met eerbied en bewondering en voert tot de gevolgtrekking: de wiskunde en het wiskunde-onderwijs in ons land zouden er anders uitzien zonder zijn werk. Deze conclusie zou volledig rechtvaardigen om op zijn zeventigste verjaardag te getuigen van zijn betekenis en hem erkentelijkheid te uiten voor het vele, dat hij ons heeft geschonken. Maar onze gedachten zullen op deze feestdag niet allereerst verwijlen bij de geleerde en de docent, maar uitgaan naar de gave en onkreukbare mens, die ons sterkt door zijn voorbeeld. Wij danken voor het voorrecht, dat wij hem mochten ontmoeten en zijn gelukkig, dat wij hem in ons midden hebben. Deze dank uiten wij door hem deze uitgave op te dragen van het tijdschrift, dat hem zo aan het hart ligt. Zij die daaraan hebben medegewerkt deden dit in het besef, dat zij mochten spreken namens velen, namens allen in ons vaderland, die in wiskunde en wiskunde-onderwijs belangstellen.

O. BOTTEMA.

OVER DE KINEMATISCHE AFBEELDING VOLGENS BETH EN HAAR TOEPASSING OP DE CENTRALE DRIJFSTANGBEWEGING

door

O. BOTTEMA.

In aansluiting aan het werk van Study heeft Beth (*Christiaan Huygens*, 16 (1940), 226—272 en 18 (1942), 145—154) een afbeelding ontwikkeld van de ∞^3 posities van een in zichzelf bewegend vlak op de punten van de ruimte. In zijn *Kinematica in het platte vlak* (1949) neemt deze afbeelding een centrale plaats in en met haar hulp weet de schrijver op elegante wijze door middel van meetkundige redeneringen de gehele planimetrische kinematica systematisch te behandelen.

In het volgende beschouwen wij de afbeelding van Beth uit een meer analytisch gezichtspunt. Wij beperken ons daarbij tot een voorbeeld, de *centrale drijfstangbeweging*; een behandeling van de algemene stangenvierhoek kan op overeenkomstige wijze plaats vinden.

Bij de afbeelding van Beth wordt een bepaalde stand S_0 van het bewegende vlak als uitgangspunt genomen. Een willekeurige stand S kan, zoals bekend is uit S_0 verkregen worden door een welbepaalde rotatie om een centrum C over een hoek α . Zijn a_1, a_2 de rechthoekige coördinaten van C en is $u = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$, dan wordt aan S toegevoegd het punt (X, Y, Z, W) der projectieve ruimte, waarvoor geldt

$$X : Y : Z : W = -a_2 u : a_1 u : u : 1. \quad (1)$$

In de beeldruimte zijn enige figuren van bijzondere betekenis, n.l. de punten I_1 (1i00) en I_2 (1—i00), hun verbindingslijn l ($Z = W = 0$) en de vlakken V_1 en V_2 door l , met de vergelijkingen $Z \pm iW = 0$.

Aan een bewegend systeem met één vrijheidsgraad is in de beeldruimte een *kromme*, aan een mechanisme met twee vrijheidsgraden is een *oppervlak* toegevoegd.

Bij de centrale drijfstangbeweging (fig. 1) wordt het punt A gedwongen op de rechte n te blijven, terwijl B de cirkel γ doorloopt,

waarvan het middelpunt O op n ligt. Wij stellen de *stang* $AB = s$, de *arm* $OB = r$; voorts zij $l^2 = s^2 - r^2$.

Het assenstelsel hebbe O tot oorsprong en n als x -as. Als beginstand S_0 kiezen wij: B_0 in $(r, 0)$, A_0 in $(a, 0)$ waarbij $a = r + s$.

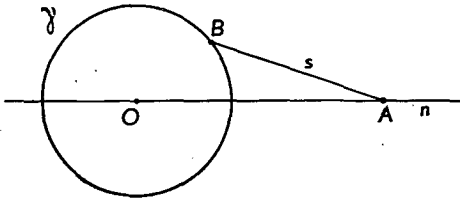


Fig. 1.

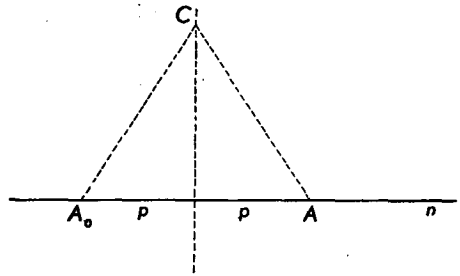


Fig. 2.

Beschouw eerst de beweging (met twee vrijheidsgraden), waarbij A op n blijft (fig. 2). Het centrum C ligt willekeurig op de middelloodlijn van A_0A , terwijl $\angle A_0CA = \alpha$. Is $A_0A = 2p$, dan is dus $a_1 = \dot{a} + \dot{p}$, $u = \frac{\dot{p}}{a_2}$, zodat $X : Y : Z : W = -\dot{p} : (a + \dot{p})u : u : 1$; de beweging wordt dus afgebeeld op het oppervlak:

$$Q_1 \equiv XZ + YW - aZW = 0, \quad (2)$$

een kwadratisch regeloppervlak door l^1 , dat in I_1 en I_2 resp. raakt aan V_1 en V_2 .

Beschouwt men de beweging waarbij B de cirkel γ doorloopt en is C een willekeurig centrum op de middelloodlijn van BB_0 , $OC = q$, $\angle B_0OC = \beta$ (fig. 3), dan is $a_1 = q \cos \beta$, $a_2 = q \sin \beta$,

$$u = \frac{-r \sin \beta}{q - r \cos \beta}, \text{ zodat}$$

$$X : Y : Z : W = -q \sin \beta : q \cos \beta : 1 : \frac{r \cos \beta - q}{r \sin \beta}$$

waaruit volgt dat de beweging wordt afgebeeld op

$$Q_2 \equiv X^2 + Y^2 - r(XW + YZ) = 0, \quad (3)$$

¹⁾ Het lijkt minder juist, zoals Beth doet, dit oppervlak een *paraboloïde* te noemen; de beeldruimte heeft nl. geen *affine* structuur.

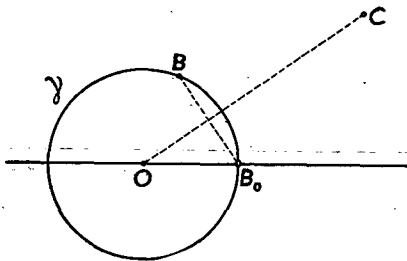


Fig. 3.

een kwadratisch regeloppervlak door I_1 en I_2 . De drijfstaangbeweging wordt dus afgebeeld op de biquadratische ruimtekromme Γ , die de doorsnede is van (2) en (3); deze kromme gaat door I_1 en I_2 en heeft aldaar raaklijnen, die in V_1 en V_2 liggen.

De voornaamste door Beth in zijn *Kinematica* (pg. 130) meetkundig afgeleide resultaten zijn daarmee teruggevonden. Terwijl wij voor de interpretatie daarvan naar zijn werk verwijzen, maken wij van onze vergelijkingen (2) en (3) gebruik om de kromme Γ nader te onderzoeken.

Γ is de basiskromme van de bundel kwadratische oppervlakken $\lambda Q_1 + Q_2 = 0$. Deze bundel bevat vier kegels. De bijbehorende waarden van λ zijn de wortels der vergelijking $|\lambda Q_1 + Q_2| = 0$, dus van

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & \lambda & -r \\ 0 & 2 & -r & \lambda \\ \lambda & -r & 0 & -a\lambda \\ -r & \lambda & -a\lambda & 0 \end{vmatrix} \equiv \lambda^4 - 2(r^2 + 2l^2)\lambda^2 + r^4 = 0 \quad (4)$$

Voor de wortels vindt men $\lambda_1 = s + l$, $\lambda_2 = s - l$, $\lambda_3 = -s + l$, $\lambda_4 = -s - l$. Daar $s > 0$, $r > 0$ zijn de wortels onderling ongelijk als $l \neq 0$; zij zijn twee aan twee gelijk als $l = 0$, dus $s = r$. De beide kwadratische oppervlakken raken elkaar dan tweemaal, de beeldkromme is ontaard in de rechte $X - rW = Y - rZ = 0$ en in een cubische ruimtekromme. De eerste is het beeld van een rotatie, de tweede dat van een elliptische beweging. De betekenis van $s = r$ is duidelijk: het mechanisme is *strekbaar*; het is welbekend dat een strekbare centrale drijfstaangbeweging op de genoemde wijze uiteenvalt¹⁾.

Voor het niet-strekbare systeem zijn twee gevallen te onderscheiden; als $s > r$ dan kan B de cirkel γ volledig doorlopen, de beweging is een *krukbeweging*; is $s < r$ dan hebben wij een *slingerbeweging*. In onze notatie is dan respectievelijk $l^2 > 0$ en $l^2 < 0$.

In het eerste geval zijn de vier wortels λ_i reëel; in dat geval leert de analytische meetkunde²⁾ dat de beide kwadratische regeloppervlakken elkaar *doorboren*: Γ bestaat uit twee gescheiden takken; voor $l^2 < 0$ zijn de vier wortels λ_i twee aan twee toegevoegd complex, tussen Q_1 en Q_2 heeft *afscheuring* plaats: Γ bestaat uit een enkele tak. Uit de gedaante van Γ kan men met de door Beth aangegeven constructie conclusies trekken voor de *baankrommen*.

Schuh, *Leerboek der Theoretische Mechanica*, 1e deel, 2e stuk (1935), pg. 231

²⁾ Barrau, *Analytische Meetkunde*, II (1927), pg. 252—258.

van het mechanisme en men vindt op deze wijze het verschil in gedrag tussen de krommen bij de kruk- en bij de slingerbeweging terug.

De kromme Γ heeft één projectieve invariant, nl. de dubbelverhouding $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4)$. Voor deze dubbelverhouding en haar geassocieerde waarden vindt men:

$$\frac{s^2}{r^2}, \frac{r^2}{s^2}, \frac{-l^2}{r^2}, \frac{-r^2}{l^2}, \frac{l^2}{s^2}, \frac{s^2}{l^2} \quad (5)$$

De kromme is *harmonisch* als $l^2 = r^2$, dus als $s^2 = 2r^2$; de stang is dan gelijk aan de zijde van het in γ beschreven vierkant.

Γ is een elliptische ruimtekromme en men kan, door Q_1 en Q_2 op andere coördinaten te transformeren (hun gemeenschappelijk poolviervlak als grondtetraeder kiezend) gemakkelijk een parametervoorstelling van Γ door elliptische functies (van Jacobi) afleiden. En daaruit volgt dan een parametervoorstelling voor de drijfstangbeweging zelf en voor haar baankrommen; de invariant van de elliptische functies is daarbij gelijk aan een der waarden (5) en heeft dus een eenvoudige meetkundige betekenis. Een dergelijke voorstelling schijnt niet zeer bekend te zijn en het is merkwaardig dat de door Beth gegeven afbeelding tot een dusdanige beschrijving van de beweging van het mechanisme de toegang opent.

OVER GEBONDENHEID EN VRIJHEID VAN DE DOCENT

door

Dr H. BREMEKAMP

Wij zijn bij ons middelbaar onderwijs — ik denk daarbij vooral aan de wiskunde — gewoon aan een tamelijk nauwkeurig voorgescreven programma. Dat heeft zijn goede redenen. Voor hen, die verder onderwijs zullen genieten is het nodig, dat zij die onderwerpen, waarop voortgebouwd zal worden, goed kennen en het is wenselijk, dat het programma daarvoor waarborgen biedt. Maar ook voor hen, voor wie de middelbare school eind-onderwijs geeft, nog steeds de grotere groep, is een ongeveer vaststaand programma gewenst. De ervaring leert, dat het een groot maatschappelijk belang is, dat het peil op de middelbare scholen niet te veel uiteenloopt, dat zij gelijkwaardige diploma's uitreiken. Het belang van een nauwkeurig omschreven programma en van gelijke opvattingen daarover is dan ook in leraarskringen steeds gevoeld, het tijdschrift Euclides ontleent daaraan voor een deel zijn bestaansrecht, en individueel en in verschillende commissies — de commissie „Beth” is een sprekend voorbeeld — heeft men voortdurend aan deze zaak aandacht geschonken en ook getracht met de omschrijving der eisen verder te gaan, dan in de wettelijke voorschriften. Dat is een gelukkig verschijnsel. Ik heb wel eens de rhetorische vraag horen uiten: „wat hebben nu al die commissies uitgericht” maar het stellen van die vraag in die zin berust naar mijn mening op verkeerd begrip. Het is voor het onderwijs van groot belang omdat in de kring der leraren voor didactische questies belangstelling bestaat en dat daaraan gewerkt wordt ¹⁾. Het is het meest werkzame middel om het onderwijs voor verstarring te behoeden. Dat bij besprekingen over zulke onderwerpen dikwijls opvallende meningsverschillen blijken is dan ook mijns inziens eerder toe te juichen dan te betreuren. Men zegge ook niet, „ons programma is nu op bevredigende wijze geregeld, daar behoeven we ons geen zorg meer over te

¹⁾ Het zelfde geldt trouwens wat betreft de wetenschappelijke beoefening van hun vak, maar dit is nu hier niet direct in het geding, ofschoon er wel tussen beide, wetenschap en didactiek, een zekere wisselwerking is op te merken.

maken." Want, behalve dat men in deze zaken niet met „bevre digend" genoeg moet nemen — voor het onderwijs is zelfs het beste niet goed genoeg — moet men er voortdurend op bedacht zijn, dat de voorwaarden, waaraan het programma te voldoen heeft, steeds veranderen. Zij veranderen door verschillende oorzaken, uitwendige, daaruit voorkomend, dat bij het hoger onderwijs de opvattingen omtrent datgene, wat men van een aankomend student moet vooronderstellen en wat voor hem van primair belang is, steeds enigszins aan verandering onderhevig zijn, maar nog meer inwendige, doordat bij het middelbaar onderwijs zelf voortdurend nieuwe ideeën naar boven komen. Het behoort tot de taak van de leraar, deze te overdenken, in sommige gevallen ze te beproeven of zelfs in de practijk te brengen. Het is een boeiend maar enigszins gevaarlijk deel van zijn taak, dat voorzichtigheid en wijsheid eist. Dat beproeven en eventueel in practijk brengen vooronderstelt, dat de leraar behalve voor de afwerking van het voorgeschreven programma tijd weet te vinden voor bijzondere onderwerpen. Het staat naast en is dikwijls nauwelijk te onderscheiden van het behandelen van onderwerpen van eigen keuze, waar hij, gedreyen door eigen enthousiasme, kan verwachten voor de leerlingen bijzonder boeiend te worden, wat voor het nuttig effect van het onderwijs een factor van het grootste belang is.

Ik wil nader ingaan op de vrijheid van de docent, onderwerpen buiten het programma om te behandelen zoals in de vorige zin bedoeld, of ook bij wijze van proef. Vooreerst nog een opmerking, die bij het vorige aansluit. Zo'n proef slaagt haast altijd, maar het zou onjuist zijn, uit dat welslagen tot de bijzondere qualiteiten van het behandelde onderwerp te besluiten, het is gewoonlijk voor het grootste deel toe te schrijven aan het enthousiasme van de docent. Velen zullen evenals ik de ervaring hebben opgedaan, dat oudleerlingen zich het liefst de uren in de herinnering terugroepen, waarin „buiten het boek gegaan werd" zoals zij het gaarne uitdrukken.

Het is zeker niet mijn bedoeling, propaganda te maken voor het behandelen van bijzondere onderwerpen ten koste van het voorgeschreven programma. Ik houd het voor de eerste plicht van de leraar, al was het alleen maar uit practische overwegingen, zijn leerlingen zover te brengen, dat ze aan de gestelde eisen voldoen. Maar als hij er in slaagt, nu en dan eens een uur over te houden, waartoe wel de omstandigheden zullen moeten meewerken, dan kan hij die uren nuttig besteden, ze zelfs voor de leerlingen tot iets bijzonders maken.

Welke onderwerpen dan in aanmerking komen, hangt in de eerste plaats van de persoonlijke smaak van de docent af. Uit het vorige blijkt wel, dat het naar mijn mening van belang is, hem daarbij zo groot mogelijke vrijheid te laten. Ook zal een rol spelen, welke onderwerpen in een bepaalde tijd onder de wiskundigen bijzondere belangstelling genieten. Ongeveer een halve eeuw geleden was bij de Nederlandse wiskundigen wat toen heette de nieuwere meetkunde van de driehoek zeer in trek. Stellig is daarin heel wat te vinden, dat ook op leerlingen fascinerend kan werken. Ik zou dat zeker niet in het normale programma willen opnemen en ik denk, dat op het ogenblik niemand dat zou willen, maar wel meen ik, dat het gunstig kan werken, als een docent in zo iets zijn neiging uitviert. Om een dergelijk voorbeeld uit nieuwere tijd te noemen, het trigonometrisch bewijs van de stelling van Morley over de trisectrices der hoeken van een driehoek (in haar eenvoudigste vorm) is voor leerlingen der middelbare scholen wel te volgen. Deze stelling heeft iets verrassends en daardoor zal er voor vele leerlingen een zekere bekoring van uitgaan. Ook de projectieve meetkunde biedt wel onderwerpen, waarvan men hetzelfde kan zeggen. Dat geldt trouwens voor elk van onze wiskundevakken. De analytische meetkunde is op het gymnasium examenvak, daar liggen aan de grens van hetgeen men pleegt te behandelen bijzondere onderwerpen voor het grijpen. Ook kan daarbij als aansluitend onderwerp genoemd worden de stereometrische behandeling der kegelsneden, b.v. de stellingen van Dandelin. Wat de rekenkunde betreft denk ik het eerst aan de laagste klassen. Ik zou willen herinneren aan stellingen, die voorkomen bij de ontwikkeling van breuken met een priemgetal tot noemer in repeterende breuken, dat men dan bij verschillende tellers cyclische verwisselingen van de repeterende cijfers vindt, en als men de repeterende cijfers in een aantal groepen van gelijke aantallen cijfers verdeelt en de zo verkregen getallen optelt, steeds een getal verkrijgt, dat met enkel negens geschreven wordt of een veelvoud van zo'n getal. Als men mij vraagt „wat heb je nu aan die stellingen?” dan weet ik niets te antwoorden, maar ik ben overtuigd, dat verschillende leraren er een boeiende les over zouden kunnen geven. Er is indertijd nogal wat te doen geweest over het invoeren van (min of meer) strenge definities van het onmeetbare getal. Ik zou deze, naar mijn gevoel analytische, quaestie eerder bij de algebra willen onderbrengen dan, zoals men vroeger gewoonlijk deed, bij de rekenkunde. Ik voor mij beschouw het als een zaak, die boven het niveau der middelbare school ligt, ik heb

bezwaar tegen het invoeren als verplicht onderwerp, maar ik aanvaard onmiddellijk, dat een bekwaam docent er wel eens succes mee kan hebben en dan zijn leerlingen iets geeft van grote waarde. Om in de algebra nog eens iets anders te noemen, dat als bijzonder onderwerp in aanmerking kan komen, men kan bij de vierkantsvergelijking met de behandeling van de symmetrische functies der wortels wat verder gaan dan gebruikelijk is, ook met stelsels vergelijkingen en in het algemeen met die onderwerpen, die aan de grens liggen van wat Wijdenes oorspronkelijk midden-algebra genoemd heeft.

Wij kunnen in dit verband ook denken aan vele welbekende bewijzen, waar een fout in voorkomt, en die tot evident onjuiste uitkomsten voeren. In de meetkunde gewoonlijk door te werken met een onjuiste figuur, in de algebra door in de loop van het bewijs beide leden van een gelijkheid te delen door een vorm, die nul kan worden, of door beide leden van een ongelijkheid te delen door een getal, dat in werkelijkheid negatief is, zonder op die omstandigheid te letten en op grond daarvan het ongelijktteken om te keren. Het zoeken naar de fout in zo'n redenering kan voor de leerlingen boeiend en ook ontwikkelend zijn. Het spreekt echter van zelf, dat men daarbij, evenals trouwens bij het in het vorige besprokene, niet moet overdrijven.

Bij het vorige is steeds gedacht aan het middelbaar onderwijs, maar in principe komt het hier besproken probleem bij alle soorten onderwijs voor, slechts door uiterlijke omstandigheden komt het in het ene geval meer op de voorgrond dan in het andere. In het algemeen kan men zeggen, dat naarmate men met meer gevorderde leerlingen te doen heeft, de vrijheid van de docent in de keuze der stof voor de vruchtbaarheid van zijn onderwijs belangrijker wordt. Bij het lager onderwijs met zijn nauwkeurig beperkte doelstelling zal het hier besprokene doorgaans nauwelijks een rol spelen. Toch kan ik uit eigen ervaring bevestigen, dat ook daar het bovenbeweerde geldt. Toen ik zelf admisieexamen deed, kende ik de boven aangehaalde stellingen over repeterende breuken, ik herinner mij nog goed, dat ik die erg mooi vond. Ik ben er van overtuigd, dat de onderwijzer, die ons in de vijfde en zesde klas van de lagere school rekenonderwijs gaf, daarbij een grote — en in mijn gevoel een mooie — rol heeft gespeeld.

Bij het hoger onderwijs en vooral in de hogere jaren speelt de voorkeur van de docent bij de keuze der stof een belangrijke rol. De college's, waar „capita selecta” behandeld worden, staan bij de studenten gewoonlijk in hoog aanzien en dat te meer naarmate

de persoonlijkheid van de docent meer op de voorgrond treedt. Aan de universiteiten zal dat meer opvallen dan aan de technische hogeschool, waar nuttigheidsoverwegingen en toepasbaarheidseisen toch altijd een grote rol spelen.

Ook bij het hoger onderwijs zal de docent dikwijls succes hebben door zijn leerlingen een foutieve redenering voor te dragen, waarbij het er dan natuurlijk om te doen is, de fout te vinden. Men kan dit soort opgaven, dunkt mij, hoewel ook hier overdrijving uit den boze is, meer variëren dan bij het middelbaar onderwijs, en ik wil eindigen met een dergelijk voorbeeld, dat ik, om voldoende duidelijk te zijn — maar ook alleen daarom, het voorbeeld heeft generlei pretentie — wat uitvoeriger zal behandelen.

Zoals welbekend heeft Lagrange de theorie der vrije trillingen van een gespannen snaar behandeld door de snaar te beschouwen als limietgeval van een koord, waarvan de massa wordt verwaarloosd en dat een aantal op gelijke afstanden aangebrachte stoffelijke punten draagt. Men kan nu proberen tot de theorie der vrije trillingen van een in een vaste rechthoek gespannen vlies te komen door het vlies te beschouwen als limietgeval van een vlak stelsel stoffelijke punten, die door onderling loodrechte draden met elkaar verbonden zijn. Wij hebben dan vooreerst het volgende mechanica-vraagstuk te behandelen.

Een rechthoek heeft zijden van de lengten a en b . De zijden a zijn in $m + 1$ de zijden b in $n + 1$ gelijke delen verdeeld. De overeenkomstige deelpunten zijn door draden evenwijdig aan de zijden van de rechthoek verbonden. In elk der mn snijpunten van deze draden bevindt zich een stoffelijk punt met massa μ , aan beide draden, die door dat punt gaan, verbonden. De massa der draden wordt verwaarloosd. Wij beschouwen verplaatsingen der stoffelijke punten loodrecht op het vlak van de rechthoek, die zo klein blijven, dat de tweede machten kunnen worden verwaarloosd, dat brengt mee, dat wij afzien van de verlenging der draden en de spanningen als constant kunnen beschouwen, wij zullen het geval beschouwen, dat de spanningen in alle draden ook onderling gelijk zijn, wij zullen ze door S voorstellen. Op het tijdstip $t = 0$ hebben alle stoffelijke punten een gegeven uitwijking en een gegeven snelheid. Van uitwendige krachten wordt afgezien. De beweging van het stelsel wordt gevraagd.

Als algemene coördinaten voeren we de uitwijkingen $q_{k,h}$ in, $q_{k,h}$ is de uitwijking van het stoffelijk punt, dat zich bevindt in het snijpunt van de k^{de} draad, die op de zijde a eindigt en de h^{de} draad van het andere stelsel. De bijdrage van dat punt tot de kinetische

energie is $\frac{1}{2}\mu q_{k,h}^2$. De spanning in de draad, die dat punt met het punt $k-1, h$ verbindt geeft tot de potentiële energie een bijdrage $\frac{S}{2a}(q_{k,h} - q_{k-1,h})^2$ en evenzo, die in de draad tussen het punt k, h en het punt $k, h-1$, $\frac{S}{2b}(q_{k,h} - q_{k,h-1})^2$. Wij kunnen dus

voor de kinetische energie stellen

$$T = \frac{1}{2}\mu \sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^n \dot{q}_{k,h}^2$$

en voor de potentiële energie, als we nog invoeren $q_{0,h} = q_{m+1,h} = 0$ en $q_{k,0} = q_{k,n+1} = 0$,

$$V = \frac{S}{2a} \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{h=1}^n (q_{k,h} - q_{k-1,h})^2 + \frac{S}{2b} \sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^{n+1} (q_{k,h} - q_{k,h-1})^2.$$

De vergelijkingen van Lagrange worden dus

$$\mu \ddot{q}_{k,h} + \frac{mS}{a} (-q_{k-1,h} + 2q_{k,h} - q_{k+1,h}) + \frac{nS}{b} (-q_{k,h-1} + 2q_{k,h} - q_{k,h+1}),$$

waarbij k loopt van 1 tot m en h van 1 tot n , we hebben dus in het geheel, zoals behoort, mn vergelijkingen. Het is welbekend, dat een dergelijk stelsel lineaire vergelijkingen met constante coëfficiënten oplossingen heeft van de gedaante

$$q_{k,h} = A_{k,h} \cos pt + B_{k,h} \sin pt$$

en het gaat er in de eerste plaats om, de mn waarden van p te vinden.

Substitutie geeft

$$\mu p^2 A_{k,h} + \frac{mS}{a} (A_{k-1,h} - 2A_{k,h} + A_{k+1,h}) + \frac{nS}{b} (A_{k,h-1} - 2A_{k,h} + A_{k,h+1})$$

en een dergelijke stelsel voor $B_{k,h}$.

Stellen we

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2, \quad -2 + \frac{a\mu}{mS} p_1^2 = -2 \cos \vartheta_1, \quad -2 + \frac{b\mu}{nS} p_2^2 = -2 \cos \vartheta_2.$$

dan wordt dit

$$\frac{mS}{a} (A_{k-1,h} - 2A_{k,h} \cos \vartheta_1 + A_{k+1,h}) + \frac{nS}{b} (A_{k,h-1} - 2A_{k,h} \cos \vartheta_2 + A_{k,h+1}).$$

Het is onmiddellijk te zien, dat aan dat stelsel wordt voldaan door

$$A_{k,h} = A \sin k\vartheta_1 \sin h\vartheta_2$$

en wij vinden evenzo

$$B_{k,h} = B \sin k\vartheta_1 \sin h\vartheta_2$$

Aan de voorwaarde $q_{k,h} = 0$ voor $k = 0$ en voor $h = 0$, is dan vanzelf voldaan.

De voorwaarde $q_{m+1,h} = 0$ geeft $\vartheta_1 = \frac{\pi s_1}{m+1}$, de voorwaarde $q_{k,n+1} = 0$, geeft $\vartheta_2 = \frac{\pi s_2}{n+1}$ en het is niet moeilijk te zien, dat we alle oplossingen krijgen als we s_1 de gehele getallen van 1 tot m en s_2 de gehele getallen van 1 tot n laten doorloopen.

Wij vinden nu

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 = \frac{4S}{\mu} \left(\frac{m}{a} \sin^2 \frac{s_1 \pi}{m+1} + \frac{n}{b} \sin^2 \frac{s_2 \pi}{n+1} \right)$$

waarmee de mn waarden voor p bekend zijn (vervanging van p door zijn tegengestelde geeft dezelfde oplossing). Wij zullen ze aangeven met het teken p_{s_1, s_2} .

De oplossing wordt

$$q_{k,h} = \sum_{s_1, s_2} A_{s_1, s_2} \sin k \frac{s_1 \pi}{m+1} \sin h \frac{s_2 \pi}{n+1} \cos p_{s_1, s_2} t + \\ + \sum_{s_1, s_2} B_{s_1, s_2} \sin k \frac{s_1 \pi}{m+1} \sin h \frac{s_2 \pi}{n+1} \sin p_{s_1, s_2} t.$$

De coëfficiënten A_{s_1, s_2} en B_{s_1, s_2} moeten nu nog uit de beginvoorwaarden bepaald worden. Wij vinden, als voor $t = 0$, $q_{k,h} = a_{k,h}$, $q_{k,h} = b_{k,h}$

$$a_{k,h} = \sum_{s_1=1}^m \sum_{s_2=1}^n A_{s_1, s_2} \sin k \frac{s_1 \pi}{m+1} \sin h \frac{s_2 \pi}{n+1},$$

waaruit we oplossen

$$\frac{mn}{4} A_{s_1, s_2} = \sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^n a_{k,h} \sin k \frac{s_1 \pi}{m+1} \sin h \frac{s_2 \pi}{n+1}.$$

Evenzo

$$b_{k,h} = \sum_{s_1=1}^m \sum_{s_2=1}^n p_{s_1, s_2} B_{s_1, s_2} \sin k \frac{s_1 \pi}{m+1} \sin h \frac{s_2 \pi}{n+1},$$

waaruit

$$\frac{mn}{4} p_{s_1, s_2} B_{s_1, s_2} = \sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^n b_{k,h} \sin k \frac{s_1 \pi}{m+1} \sin h \frac{s_2 \pi}{n+1}.$$

Het is nu gemakkelijk te zien, dat we door de limietovergang $m \rightarrow \infty$ en $n \rightarrow \infty$, waarbij μ moet vervangen worden door $\frac{ab\sigma}{mn}$ (σ de dichtheid van het vlies) *niet* geraken tot de formules voor de

vrije trillingen van het gespannen vlies. We hebben daartoe slechts op de formule voor ϕ^2 te letten.

Het is trouwens gemakkelijk te zien, waarom de verwachting, dat wij zo tot de formules voor het gespannen vlies zouden geraken, onjuist was en ook welke verandering men moet aanbrengen, om dat wel te bereiken. Het is overbodig, de betreffende formules op te schrijven. Waar het hier op aankomt is, dat het voor de student een nuttige oefening is, dat te vinden.

DESCARTES, PASCAL EN DE PROEF OP DE PUY-DE-DÔME

door

E. J. DIJKSTERHUIS.

De barometerproef van Torricelli, die in de tijd waarin ze voor het eerst gedaan werd, een opzienbarende natuurwetenschappelijke vondst betekende, is reeds lang afgedaald naar de regionen van het allerelementairste physica-onderwijs. Dat verzwakt wel eens het besef van haar historische betekenis en verduistert ook wel de blik op haar wetenschappelijke draagwijdte. De verklaring van het barometerverschijnsel met behulp van luchtdruk schijnt tegenwoordig reeds de beginneling evident en wanneer hij verneemt, dat Pascal haar pas volledig gewaarborgd achtte, toen hij zich overtuigd had, dat de kwikhoogte op de top van een berg kleiner is dan aan de voet, is hij geneigd, deze contrôle voor overbodig te houden.

Zodra men zich even in de historische situatie verplaatst, wordt het onmiddellijk duidelijk, dat zij dat geenszins was. Voor Pascal zelf, die zeer strenge eisen aan een physische theorie stelde ¹⁾, was het eerst de *Grande Expérience de l'Equilibre des Liqueurs* (zoals hij de proef van de Puy-de-Dôme in de eerste publicatie erover noemt), die de hypothese van de luchtdruk van de rang van *une opinion, une simple conjecture*, tot die van een uitgemaakte waarheid verhief. En er waren nog zoveel Franse geleerden die de gedachte, als zoude het verschijnsel van Torricelli iets met de hoogte boven het aardoppervlak te maken hebben, bij voorbaat als absurd verwierpen, dat het, om hen van hun dwalingen te bekeren, wel zeer nodig was, door een zorgvuldig uitgevoerd experiment die samenhang buiten twijfel te stellen.

Om dit alles te verduidelijken, wijzen wij er op, dat toen Torricelli's *Esperienza del Argento Vivo* in 1646 in Frankrijk bekend was geworden en daar door Pierre Petit in samen-

¹⁾ Voor inlichtingen hierover moge worden verwezen naar mijn werk *De Mechanisering van het Wereldbeeld*, Amsterdam 1950, p. 408 vlg. Men vindt daar tevens nadere bijzonderheden over Pascal's experimenteel werk. Het boek wordt verder geciteerd als *Mechanisering*.

werking met Etienne Pascal en zijn zoon Blaise was herhaald, er onder de Franse physici groot meningsverschil over haar verklaring bestond. Afgezien van talrijke secondaire geschilpunten ging het debat voornamelijk over twee kwesties: 1) of lucht op haar natuurlijke plaats gewicht had en, zo ja, of dit gewicht in staat kon worden geacht, een kwikzuil van ca 76 cm lengte te dragen; 2) of de boven het kwik in de buis vrijgekomen ruimte al dan niet leeg was. Er waren dus, van detailverschillen afgezien, vier verschillende standpunten mogelijk: men kon (om de destijds gebruikelijke termen te bezigen) voor of tegen de *colonne d'air* zijn en voor of tegen *le vide*. Alle denkbare combinaties van deze twee opvattingen blijken inderdaad voorgekomen te zijn: de peripatetische geleerden waren tegen beide hypothesen; Descartes nam de eerste aan en verwierp de tweede; zijn eeuwige tegenstander Roberval koos juist andersom, terwijl Pascal zich, na enige aarzeling ten aanzien van de vacuumkwestie, van beider juistheid overtuigd verklaarde.

Hij deed dat allerminst lichtvaardig. Na eerst door een reeks van weloverwogen en rijk gevarieerde proeven onweerlegbaar te hebben aangetoond, dat het verschijnsel van Torricelli met behulp van de *colonne d'air* verklaard kon worden ¹⁾, heeft hij niet gerust, voordat hij door nieuwe experimenten de denkbaarheid van andere verklaringen had uitgesloten. Hij voerde daartoe in de eerste plaats het befaamde experiment van *le vide dans le vide* uit, dat in zijn verschillende varianten een van de kunststukken van de 17e-eeuwse physica is geworden ²⁾; het bestond in het doen van de proef van Torricelli in vacuo en daar men nog niet over luchtpompen kon beschikken, vereiste dat de opstelling van een bakbarometer in het vacuum van een anderen. Hierbij bleek, in overeenstemming met de voorspelling, dat het kwik in bak en buis van de binnenste barometer even hoog kwam te staan en dat het weer in de buis ging stijgen, wanneer men door het kwik van de buitenste lucht liet opstijgen.

Het typeert Pascal's streng kritische houding ten aanzien van de vorming van een fysieke theorie, dat hij deze proef nog niet als afdoend argument voor de leer van de luchtdruk durfde beschouwen. Het is hem niet ontgaan, dat de theorie van de beperkte en meetbare *horror vacui*, die door Galilei was aangehangen en waaraan hij zich zelf aanvankelijk ook gehouden had,

¹⁾ Pascal, *Oeuvres*; ed. L. Bruschvicg e.a. 14 vol. Paris, 1904—1914, II 53—76. Verder te citeren als *Oeuvres*.

²⁾ *Mechanisering*, p. 496.

even goed in staat was, van het verschijnsel rekenschap te geven ¹⁾. In dit verband nu blijkt het denkbeeld bij hem opgekomen te zijn, de proef van Torricelli op een berg uit te voeren: mocht het blijken, dat, naarmate boven het kwik in de bak een kleinere luchtkolom staat, ook een kleinere kwikkolom in de buis kan worden opgehouden, dan zou, meende hij, onweerlegbaar bewezen zijn, dat het niveauverschil in bak en buis toe te schrijven is aan de druk die de dampkringslucht door haar gewicht uitoefent.

Wij zullen hier in het midden laten, of Pascal terecht aan deze bergproef de rang van *experimentum crucis* toekent die *le vide dans le vide* in zijn oog nog niet bezeten had. Men kan aantonen, dat de theorie van de beperkte horror vacui de eerste zo goed kan verklaren als de tweede en dat er dus geen andere dan subjectieve gronden konden zijn, haar zoveel hoger te waarderen ²⁾. Het gaat ons hier echter niet zozeer om de bewijskracht van de proef als wel om een merkwaardige kwestie die naar aanleiding van de oorsprong van het denkbeeld ervan gerezen is. Het blijkt namelijk ³⁾, dat Descartes uitdrukkelijk heeft beweerd, dat hij het Pascal aan de hand heeft gedaan en dat hij zich zeer gekrenkt heeft getoond, toen deze allerminst geneigd bleek, hem de eer ervan te gunnen en de verdienste met klem voor zich zelf bleef opeisen.

Dit is een conflict, waar men, gezien de twee persoonlijkheden die het betrof, niet licht overheen mag lopen. Wij willen er dus iets dieper op ingaan, maar moeten daartoe eerst iets mededelen over een onderhoud tussen Descartes en Pascal, dat op 23 September 1647 is begonnen en de volgende dag is voortgezet en waarin het denkbeeld van de bergproef ter sprake moet zijn gebracht. Wij zijn van het gesprek enigszins op de hoogte door een brief ⁴⁾ van Blaise's jongste zuster, Jacqueline, aan de oudste, Gilberte, en spreken er des te liever over, omdat het verslag dat er in gedaan wordt, door het heldere licht dat het op de twee grote Franse denkers werpt, een uitzonderlijke biografische waarde bezit.

Descartes, in 1647 te Parijs vertoevend, heeft den wens te kennen gegeven, de jeugdige Pascal te ontmoeten en, daar hij diens slechte gezondheidstoestand kent, laat hij op Zondag 22 September door zijn vriend Martigny vragen, of het gelegen

¹⁾ *Mechanisering*, p. 497.

²⁾ *Mechanisering*, p. 498.

³⁾ Brief aan Mersenne van 13 December 1647. *Oeuvres*; ed. Adam et Tannery, V. 99.

⁴⁾ Pascal, *Oeuvres* II 42—48.

komt, dat hij hem de volgende dag komt bezoeken. Jacqueline, die alleen thuis is — Blaise is naar de kerk — wordt door dit voorstel in enige verlegenheid gebracht, omdat zij weet, hoeveel moeite het haar broer 's morgens kost, zich te beheersen en een gesprek te voeren, terwijl zij anderzijds beseft, welk een eer het bezoek van de beroemde, zevenentwintig jaar oudere wijsgeer aan een vierëntwintigjarige aankomende natuuronderzoeker beduidt. Zij spreekt dus af, dat Descartes de volgende morgen om half elf komen zal. Hij verschijnt op het afgesproken uur, in gezelschap van zijn vrienden Martigny en Hardy, een jonge man in soutane en drie of vier kleine jongens waarvan niet wordt opgehelder, wat zij er bij deden. Pascal heeft van zijn kant de wiskundige Roberval uitgenodigd, het onderhoud bij te wonen — weinig tactvol, want de man is berucht om zijn onbehouwenheid en is bovendien een gezworen vijand van Descartes.

Na uitwisseling der gebruikelijke beleefdheden wordt eerst over *l'instrument* gesproken, waarmee blijkbaar de *Pascaline*, de door Pascal uitgevonden rekenmachine, bedoeld wordt. Roberval demonstreert haar en de bewondering is algemeen.

Daarna komt de brandende kwestie aan de orde: *En suite on se mit sur le Vuide, et M. Descartes avec un grand sérieux, comme on luy contoît une expérience et qu'on luy demanda ce qu'il croyoit qui fust entré dans la syringue* ¹⁾ *dit que c'estoit de la matiere subtile; sur quoy mon frere respondit ce qu'il put, et Mr. de Roberval, croyant que mon frere auroit peine à parler, entreprit avec un peu de chaleur Mr. Descartes, avec civilité pourtant, qui lui respondit avec un peu d'aigreur qu'il parleroit à mon frere tant que l'on voudroit, parce qu'il parloit avec raison, mais non pas avec luy, qui parloit avec preoccupation; et là dessus, voyant à sa montre qu'il estoit midy, il se leva parce qu'il estoit prié de diner au fauxbourg Saint-Germain, et M. de Roberval aussy, si bien que Mr. Descartes l'emmena dans une carosse où ils estoient tous deux seuls, et là ils se chantèrent goguette, mais un peu plus fort que jeu à ce que nous dit Mr. de Roberval qui revint icy l'aprez dinée . . .*

Men ziet: Jacqueline doet in waarnemings- en uitdrukkingsvermogen voor haar broer niet onder. In haar korte, maar merkwaardig rake schetsje zijn alle drie de grote deelnemers aan het gesprek met volkomen scherpste getekend: Blaise, als steeds

¹⁾ De syringue (tegenwoordig seringue) is een glazen buis, waarin een luchtdicht sluitende zuiger heen en weer bewogen kan worden. De bedoelde, destijds drukbesproken proef bestond in het naar boven trekken van de geheel naar beneden geduwde zuiger, terwijl de smalle benedenopening met de vinger gesloten was.

worstelend met zijn vele kwalen, misschien wel bedlegerig en die het moeite kost, zich te bedwingen, wanneer hij Descartes *avec un grand sérieux* de onvermijdelijke *matière subtile* (in zijn oog een volkomen hersenspinsel) in het geding hoort brengen; Roberval, spreekwoordelijk onbeleefd, maar die zich bij deze gelegenheid goed houdt (Jacqueline vermeldt het als een bijzonderheid); ten slotte Descartes zelf, volkomen vrij van twijfel aan de onfeilbaarheid van zijn denken, die van Pascal desnoods nog tegenspraak verdragen wil, maar wiens hautaine aard zich dadelijk laat gelden, wanneer *ce monstre de Rob* zich verستout hem aan te vallen. Ten slotte de scène in de karos, waarover de schrijfster helaas niets uit eigen ervaring kan vertellen.

Zij kan, het, jammer genoeg, ook niet over een gesprek onder vier ogen dat Descartes de volgende morgen van acht tot elf uur met Blaise gevoerd heeft. Hij had de eerste dag al zijn plan aangekondigd, terug te komen om dan meteen advies over zijn ziekte te geven; hij liet zich altijd nogal voorstaan op zijn medisch inzicht. Jacqueline weet alleen te vertellen, waaruit dat advies heeft bestaan: 's morgens zo lang in bed blijven tot het begon te vervelen (een van zijn eigen trouw opgevolgde leefregels) en veel bouillion te drinken. Zij heeft echter geen tijd gehad, het gesprek bij te wonen, omdat zij het te druk had met de voorbereidingen voor het bad, dat Blaise die dag voor het eerst zou nemen.

In een van deze twee gesprekken heeft Descartes nu, zoals hij later meer dan eens releveert, aan Pascal het experiment op de berg voorgesteld, waaraan deze, volgens zijn zeggen, nog niet gedacht had en waarvan hij ook niets had willen weten. Het kost moeite te geloven, dat dit laatste waar is. Blaise was in September 1647 reeds lang met het denkbeeld van de *colonne d'air* vertrouwd en het was slechts zijn uiterst kritische gezindheid die hem er van weerhield, haar definitief als verklaringsprincipe te aanvaarden; een proef waarbij men van een in de natuur voorkomende gelegenheid tot verkorting van de luchtkolom gebruik kon maken, moet dus wel geheel in zijn gedachtengang hebben gepast; dat hij het denkbeeld zou hebben afgewezen, toen het hem werd voorgesteld, is dus wel zeer onaannemelijk. Bovendien bestaat er niet de geringste aanleiding, hem niet op zijn woord te geloven, wanneer hij later, in antwoord op een aantijging van plagiaat, met de grootste stelligheid de volgende verklaring over de bergproef aflegt ¹⁾: *Il est véritable, Monsieur, et je vous le dis hardiment, que cette Expe-*

¹⁾ Pascal, *Oeuvres* II 494.

rience est de mon invention; et partant, je puis dire que la nouvelle cognoissance qu'elle nous a decouverte, est entierement de moy.

Daar echter aan de andere kant alles wat wij van het karakter van Descartes weten — hij kon uiterst scherp in zijn oordeel zijn en grievend onbillijk waar het de waardering van wetenschappelijke verdiensten van anderen betrof, maar hij was veel te rijk om er behoefte aan te hebben, zich het geestelijk eigendom van een ander toe te eigenen en veel te hooghartig om er neiging toe te gevoelen — ook aan zijn kant de gedachte aan kwade trouw uitsluit, is het waarschijnlijk, dat er een misverstand heeft plaats gehad. Het is mogelijk, dat Pascal, wiens moeite om zich 's morgens in bedwang te houden, er wel niet minder op zal zijn geworden, toen hij zich door een zo omvangrijk gezelschap omringd zag, helemaal niet meer naar het gesprek heeft geluisterd, toen Roberval eenmaal de discussie had overgenomen en dus ook niet gehoord heeft, dat Descartes, die immers, zij het dan ook op heel andere gronden dan hijzelf, ook aan de *colonne d'air* geloofde, ook wel eens iets zei, dat nu juist wel in zijn eigen gedachtengang paste. Het is in dit verband veelzeggend, dat hij de volgende dag schriftelijk bij Mersenne informeerde¹⁾, waarom Descartes toch de *colonne d'air* verwierp en dat de Minoriet hem er toen nog over moest inlichten, dat dit helemaal niet het geval was. Men krijgt de indruk dat Pascal zich niet heeft kunnen voorstellen, dat de schepper van de theorie der subtiële materie toch ook nog wel verstandige denkbbeelden over de physica kon hebben.

Een andere mogelijkheid is, dat Descartes zich later niet meer precies herinnerd heeft, dat bij het gesprek over *le vide* Roberval veel meer aan het woord was geweest dan Pascal zelf en dat hij daardoor de ondervonden afwijzing van het denkbeeld van de bergproef aan de verkeerde heeft toegeschreven. Roberval behoorde namelijk tot de boven reeds vermelde groep physici die zich helemaal niet konden voorstellen, dat de proef van Torricelli op een berg anders zou kunnen verlopen dan beneden in het dal.

Hoe dit alles zij, tot een openlijke prioriteitsstrijd, deze kanker van de 17e-eeuwse wetenschapsbeoefening, heeft het meningsverschil over het geestelijk vaderschap van de bergproef niet geleid: Descartes heeft er zich alleen in persoonlijke brieven over uitgelaten en voor Pascal zal de onaangename indruk die de kwestie op hem gemaakt moet hebben, wel in het niet zijn gevallen bij de hevige ergernissen die verscheidene openlijke aanvallen op zijn wetenschappelijke integriteit hem weldra gingen berokkenen.

¹⁾ Pascal, *Oeuvres* II 46.

NUMERIEKE INTEGRATIE

door

F. DE KOK.

In het volgende wordt aan de vele reeds bekende methoden om een bepaalde integraal numeriek te benaderen, een nieuwe toegevoegd.

We gaan uit van een functie $f(x)$ die voor $a \leq x \leq b$ een zesde afgeleide bezit. Allereerst zullen we aantonen dat de getallen A, B, C, D, ϱ_1 en ϱ_2 zo zijn te bepalen dat de eerste zes afgeleiden van de functie

$$H(x) = \int_{m-\frac{1}{2}x}^{m+\frac{1}{2}x} f \cdot -x \{A f(m - \frac{1}{2}x) + B f(m - \varrho_1 x) + C f(m + \varrho_2 x) + D f(m + \frac{1}{2}x)\} \\ (0 \leq x \leq b - a, m = \frac{a+b}{2})$$

nul zijn voor $x = 0$.

Stellen we

$$A f(m - \frac{1}{2}x) + B f(m - \varrho_1 x) + C f(m + \varrho_2 x) + D f(m + \frac{1}{2}x) = V(x)$$

dan is voor $1 \leq k \leq 6$:

$$H^{(k)}(x) = \frac{1}{2^k} f^{(k-1)}(m + \frac{1}{2}x) - \frac{1}{(-2)^k} f^{(k-1)}(m - \frac{1}{2}x) - k V^{(k-1)}(x) - x V^{(k)}(x),$$

$$V^{(k)}(x) = \frac{A}{(-2)^k} f^{(k)}(m - \frac{1}{2}x) + B(-\varrho_1)^k f^{(k)}(m - \varrho_1 x) + \\ + C \varrho_2^k f^{(k)}(m + \varrho_2 x) + \frac{D}{2^k} f^{(k)}(m + \frac{1}{2}x),$$

$$V^{(k)}(0) = \left\{ \frac{A}{(-2)^k} + B(-\varrho_1)^k + C \varrho_2^k + \frac{D}{2^k} \right\} f^{(k)}(m),$$

$$H^{(k)}(0) = \left\{ \frac{1}{2^k} - \frac{1}{(-2)^k} \right\} f^{(k-1)}(m) - k \left\{ \frac{A}{(-2)^{k-1}} + B(-\varrho_1)^{k-1} + C \varrho_2^{k-1} + \frac{D}{2^{k-1}} \right\} f^{(k-1)}(m).$$

Dus:

$$H^{(1)}(0) = f(m) \{1 - (A + B + C + D)\}$$

$$H^{(2)}(0) = -2f^{(1)}(m) \left\{ -\frac{A}{2} - B\varrho_1 + C\varrho_2 + \frac{D}{2} \right\}$$

$$H^{(3)}(0) = f^{(2)}(m) \left\{ \frac{1}{2^2} - 3 \left(\frac{A}{2^2} + B\varrho_1^2 + C\varrho_2^2 + \frac{D}{2^2} \right) \right\}$$

$$H^{(4)}(0) = -4f^{(3)}(m) \left\{ -\frac{A}{2^3} - B\varrho_1^3 + C\varrho_2^3 + \frac{D}{2^3} \right\}$$

$$H^{(5)}(0) = f^{(4)}(m) \left\{ \frac{1}{2^4} - 5 \left(\frac{A}{2^4} + B\varrho_1^4 + C\varrho_2^4 + \frac{D}{2^4} \right) \right\}$$

$$H^{(6)}(0) = -6f^{(5)}(m) \left\{ -\frac{A}{2^5} - B\varrho_1^5 + C\varrho_2^5 + \frac{D}{2^5} \right\}.$$

Neemt men $A = D$, $B = C$, $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$ dan $H^{(2)}(0) = H^{(4)}(0) = H^{(6)}(0) = 0$.

Stellen we $H^{(1)}(0) = H^{(3)}(0) = H^{(5)}(0) = 0$ dan krijgen we de vergelijkingen:

$$2A + 2B = 1, \quad 3 \left\{ \frac{A}{2} + 2B\varrho^2 \right\} = \frac{1}{2^2}, \quad 5 \left\{ \frac{A}{2^3} + 2B\varrho^4 \right\} = \frac{1}{2^4}.$$

Hieraan wordt voldaan door $A = \frac{1}{12}$, $B = \frac{5}{12}$ en $\varrho = \frac{\sqrt{5}}{10}$.

Dus van de functie

$$H(x) = \int_{m-1/2x}^{m+1/2x} f \cdot -\frac{x}{12} \left\{ f(m - \frac{1}{2}x) + 5f(m - \frac{\sqrt{5}}{10}x) + 5f(m + \frac{\sqrt{5}}{10}x) + f(m + \frac{1}{2}x) \right\}$$

zijn de eerste zes afgeleiden gelijk aan nul voor $x = 0$.

In verband met een bekende middelwaardestelling volgt nu

$$\frac{H(x)}{x^7} = \frac{H^{(1)}(x_1)}{7x_1^6} = \frac{H^{(2)}(x_2)}{6 \cdot 7 \cdot x_2^5} = \dots = \frac{H^{(5)}(x_5)}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7x_5^2} = \frac{H^{(6)}(x_6)}{7!x_6}, \quad 0 < x_6 < x_5, \dots < x_1 < x.$$

Nemen we nu $x = b - a$ dan volgt

$$\begin{aligned} \int_a^b f \cdot -\left\{ f(a) + 5f(m - \frac{\sqrt{5}}{10}b - a) + 5f(m + \frac{\sqrt{5}}{10}b - a) + f(b) \right\} \frac{b-a}{12} &= \\ &= \frac{(b-a)^7}{7!} \frac{H^{(6)}(t)}{t} \dots (1) \quad (0 < t < b-a) \end{aligned}$$

Nu is

$$\begin{aligned} \frac{H^{(6)}(t)}{t} &= \frac{1}{2^6} \frac{f^{(5)}(m + \frac{1}{2}t) - f^{(5)}(m - \frac{1}{2}t)}{t} \\ &\quad - \frac{6}{t} \left[\frac{A}{2^5} \{ f^{(5)}(m + \frac{1}{2}t) - f^{(5)}(m - \frac{1}{2}t) \} + B\varrho^5 \{ f^{(5)}(m + \varrho t) - f^{(5)}(m - \varrho t) \} \right] \\ &\quad - \frac{A}{2^6} \{ f^{(6)}(m + \frac{1}{2}t) + f^{(6)}(m - \frac{1}{2}t) \} - B\varrho^6 \{ f^{(6)}(m + \varrho t) + f^{(6)}(m - \varrho t) \} \\ &= -12B\varrho^6 f^{(6)}(u) - \frac{A}{2^6} \{ f^{(6)}(m + \frac{1}{2}t) + f^{(6)}(m - \frac{1}{2}t) \} - B\varrho^6 \{ f^{(6)}(m + \varrho t) + f^{(6)}(m - \varrho t) \} \quad (2) \\ &\quad (m - \varrho t < u < m + \varrho t) \end{aligned}$$

Is nu $|f^{(6)}| \leq M$ voor $a \leq x \leq b$ dan volgt uit (2)

$$\left| \frac{H^{(6)}(t)}{t} \right| \leq \frac{M}{2^2 \cdot 3 \cdot 5^2}$$

en in verband met (1) vinden we de benaderingsformule:

$$\int_a^b f = \frac{b-a}{12} \{f(a) + 5f(m - \frac{\sqrt{5}}{10} \frac{b-a}{n}) + 5f(m + \frac{\sqrt{5}}{10} \frac{b-a}{n}) + f(b)\} + \theta \frac{(b-a)^7}{2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7!} M, \quad |\theta| \leq 1.$$

We verdelen nu het segment (a, b) in n gelijke delen,

$$d_k = a + k \frac{b-a}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n; \text{ verder stellen we}$$

$$m_k = \frac{d_k + d_{k+1}}{2}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1;$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \{f(d_k) + 5f(m_k - \frac{\sqrt{5}}{10} \frac{b-a}{n}) + 5f(m_k + \frac{\sqrt{5}}{10} \frac{b-a}{n}) + f(d_{k+1})\} \frac{b-a}{12n} = T_n(f).$$

Nu geldt de stelling:

Als $f(x)$ voor $a \leq x \leq b$ een begrensde en integreerbare 6de afgeleide bezit is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^6 \left\{ \int_a^b f - T_n(f) \right\} = \frac{-(b-a)^6}{2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7!} \{f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)\}.$$

Bewijs: We passen de formule (1) toe op alle deelintervallen en sommeren over alle deelintervallen. Dan volgt

$$\int_a^b f - T_n(f) = \left(\frac{b-a}{n} \right)^7 \frac{1}{7!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H^{(6)}(t_k)}{t_k} = \left(\frac{b-a}{n} \right)^6 \frac{1}{7!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H^{(6)}(t_k)}{t_k} \frac{b-a}{n}.$$

Uit (2) volgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H^{(6)}(t_k)}{t_k} \frac{b-a}{n} = (-12B\varrho^6 - \frac{A}{2^5} - 2B\varrho^6) \int_a^b f^{(6)} = -\frac{1}{2^2 \cdot 3 \cdot 5^2} \{f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)\}.$$

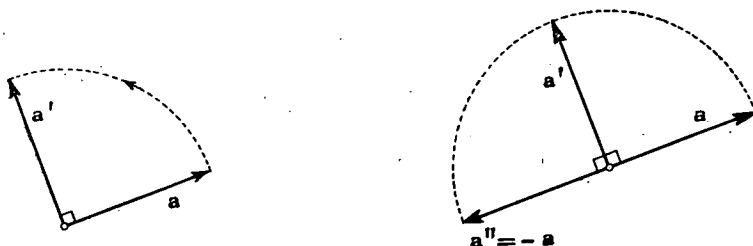
BEGINSELEN DER GONIOMETRIE

door

C. VISSER.

1. In dit stukje wordt een gedeelte van de beginselen der goniometrie ontwikkeld met behulp van enige elementaire vectorrekening. Daardoor kan men op eenvoudige wijze bereiken dat de redeneringen geldig zijn voor hoeken van willekeurige grootte en oriëntering.

2. Is $\mathbf{a}$ een vector, dan verstaan we onder de *nevenvector* van $\mathbf{a}$ de vector die ontstaat door $\mathbf{a}$ in positieve zin (tegen de beweging van de wijzers van de klok in) over een rechte hoek te draaien. Wij zullen de nevenvector van de vector $\mathbf{a}$ aangeven door $\mathbf{a}'$. De nevenvector van de nulvector $\mathbf{o}$ is de nulvector.



Blijkbaar is de nevenvector $\mathbf{a}'' = (\mathbf{a}')'$ van de nevenvector $\mathbf{a}'$ van $\mathbf{a}$ de tegengestelde vector van $\mathbf{a}$:

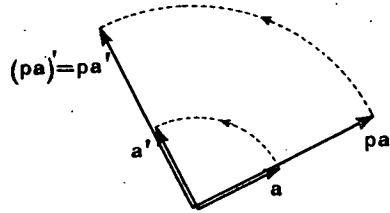
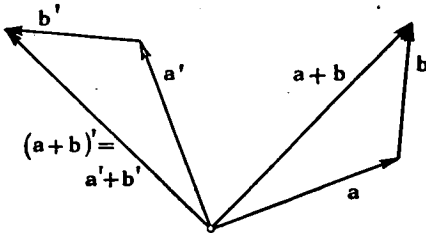
$$\mathbf{a}'' = -\mathbf{a}$$

Verder blijkt onmiddellijk dat de nevenvector van de som van enige vectoren de som is van hun nevenvectoren:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \dots)' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}' + \dots,$$

dat de nevenvector van $p\mathbf{a}$ (p een reëel getal) gelijk is aan $p\mathbf{a}'$, en, bijgevolg, dat de nevenvector van een lineaire combinatie van enige vectoren de overeenkomstige lineaire combinatie is van hun nevenvectoren:

$$(p\mathbf{a} + q\mathbf{b} + \dots)' = p\mathbf{a}' + q\mathbf{b}' + \dots$$

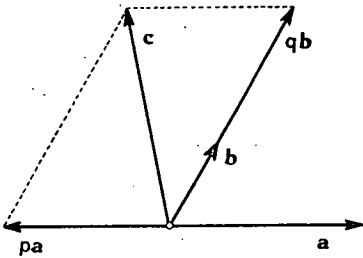


3. Zijn a en b twee van o verschillende vectoren met verschillende en niet-tegengestelde richtingen, dan kan men iedere vector c beschouwen als een lineaire combinatie van a en b :

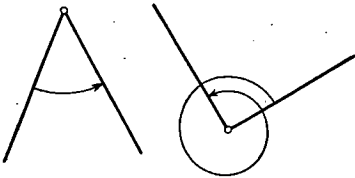
$$c = pa + qb.$$

De coëfficiënten p en q zijn ondubbelzinnig bepaald. Men noemt dit *het ontbinden van c langs a en b* .

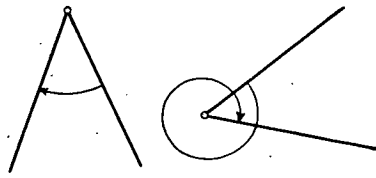
In het bijzonder kan men, als a een van o verschillende vector is, elke vector ontbinden langs a en a' .



4. Onder een hoek verstaan we in het volgende steeds een „georiënteerde hoek”. Daarbij hebben we te maken met een „beginbeen”, een „eindbeen” en een draaiing die het beginbeen doet overgaan in het eindbeen.



Positieve hoeken.

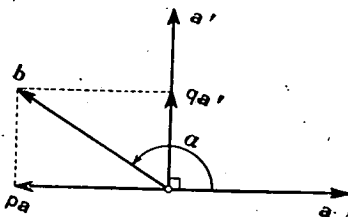


Negatieve hoeken.

5. Zij α een willekeurige hoek. Op begin- en eindbeen zetten we eenheidsvectoren a en b af (een eenheidsvector is een vector waarvan de grootte gelijk is aan die van een aangenomen eenheid van lengte). Wij ontbinden b langs a en a' ; stel dat

$$b = pa + qa'.$$

De optredende coëfficiënten p en q noemen we respectievelijk *cosinus* en *sinus* van de hoek α .



Definitie. *Cosinus en sinus van een hoek α zijn de coëfficiënten die optreden bij de ontbinding van de eenheidsvector op het eindbeen langs de eenheidsvector op het beginbeen en diens nevenvector.*

Het is duidelijk dat gelijke hoeken gelijke cosinussen en sinussen hebben.

6. Wij beschouwen naast α de hoek $-\alpha$. Zij c de eenheidsvector op het eindbeen van $-\alpha$. Uit

$$\mathbf{b} = p\mathbf{a} + q\mathbf{a}'$$

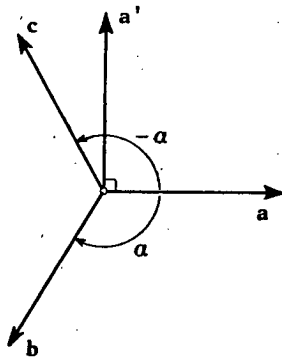
volgt blijkbaar

$$\mathbf{c} = p\mathbf{a} - q\mathbf{a}'$$

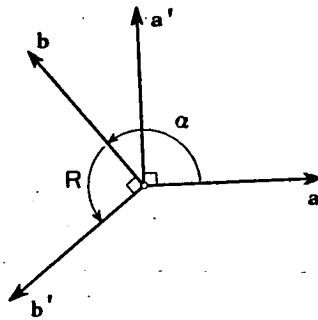
Derhalve is

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha,$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$



7. Door R geven we een positieve rechte hoek aan. Wij plaatsen R zo, dat zijn beginbeen samenvalt met het eindbeen van α , waardoor de hoek $\alpha + R$ ontstaat.



De eenheidsvector op het eindbeen van $\alpha + R$ is $\mathbf{b}'$. Uit

$$\mathbf{b} = p\mathbf{a} + q\mathbf{a}'$$

volgt

$$\mathbf{b}' = p\mathbf{a}' + q\mathbf{a}'' = p\mathbf{a}' - q\mathbf{a} = -q\mathbf{a} + p\mathbf{a}'.$$

Dus is

$$\cos(\alpha + R) = -\sin \alpha, \quad \sin(\alpha + R) = \cos \alpha.$$

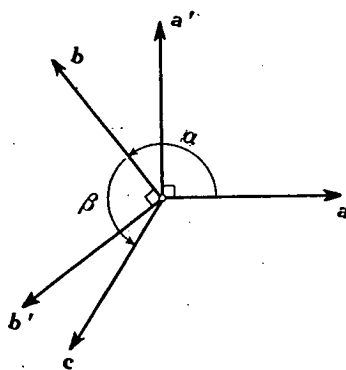
Door herhaalde toepassing hiervan (of rechtstreeks) blijkt dat

$$\cos(\alpha + 2R) = -\cos \alpha, \quad \sin(\alpha + 2R) = -\sin \alpha,$$

$$\cos(\alpha + 3R) = \sin \alpha, \quad \sin(\alpha + 3R) = \cos \alpha,$$

enz.

8. Wij beschouwen nu naast de hoek α een hoek β . Wij plaatsen β zo dat zijn beginbeen samenvalt met het eindbeen van α , waardoor de hoek $\alpha + \beta$ ontstaat. Zij $\mathbf{c}$ de eenheidsvector op het eindbeen van β .



Stel dat

$$\mathbf{c} = r\mathbf{b} + s\mathbf{b}'.$$

Men heeft

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= p\mathbf{a} + q\mathbf{a}', \\ \mathbf{b}' &= -q\mathbf{a} + p\mathbf{a}',\end{aligned}$$

en dus

$$\mathbf{c} = r(p\mathbf{a} + q\mathbf{a}') + s(-q\mathbf{a} + p\mathbf{a}') = (pr - qs)\mathbf{a} + (qs + pr)\mathbf{a}'.$$

Hieruit blijkt dat

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

Daarmede zijn de additieformules bewezen voor willekeurige hoeken α en β .

WISKUNDIGE BIJDRAGEN TOT DE PANSOPHIE VAN COMENIUS

door

C. DE WAARD.

De eerste helft der zeventiende eeuw vertoont in velerlei opzicht een merkwaardig schouwspel. Een enkele episode moge het onderwerp van dit artikel zijn, dat op meer of minder bekende gegevens berust.

Na de werkzaamheid op velerlei gebied van talrijke onderzoekers, waarvan de resultaten in ontelbare geschriften waren nedergelegd, rees de vraag, hoe dat materiaal te verwerken en er nieuwe stof aan toe te voegen. Reeds Bacon luidde de klok in zijn geschrift *Of proficience and advancement of learning* (London, 1605), later uitgedijld tot zijn *de Dignitate et Augmentis scientiarum* (London, 1623), waarin werd aangegeven, welke nieuwe feiten, observaties en experimenten aan de bekende behoorden te worden toegevoegd.

De vraag, hoe zich de door vroegere schrijvers verkregen uitkomsten op de beste wijze eigen te maken, bleef verschillende geleerden interesseeren. Onder hen de algemeen bekende Jan-
Amosa Komenského (Comenius), in 1592 geboren in Moravië, dat hij in 1628 als protestantsch geestelijke wegens godsdienstige vervolgingen moest verlaten, waarna hij zich te Lesna (Polen) vestigde; zooals reeds eerder, stichtte hij ook daar een college, waar onderwezen werd naar zijne nieuwe paedagogische inzichten, weldra ten deele uiteengezet in zijne, in 1631, verschenen *Janua linguarum*¹⁾. Zijn ideaal bepaalde zich echter niet tot de talen; de grondgedachte verdiepte zich, wilde zich tot de geheele wetenschap uitstrekken en alle kennis samenvatten tot een organische eenheid — een pansophie, een universeel systeem, waarin alle kanten van het menschelijk leven en de geheele objectieve wereld van den geest op schrandere wijze geordend zijn²⁾. Een mede-

¹⁾ Twaalf vertalingen in Europeesche talen en zes in Aziatische. Het werk deed dienst bij de opvoeding van Chr. Huygens (*Oeuvres, dl. I* (1888), pp. 541 en 549).

²⁾ Comenius, die zijn eerste filosofisch onderricht kreeg van Alstedius (1588—1638) te Herborn, zal ongetwijfeld diens *Scientiarum omnium Encyclopaedia* (Herborn, 1630) gekend hebben.

stander vond Comenius in John Dury, zoon van een Schotschen predikant te Leiden, zelf (1620—1630) predikant bij de Engelschen te Elbing (niet ver van Dantzig) en sinds 1631 bij die te Keulen, waarbij hij op een doorreis naar Engeland, omstreeks het einde van 1634, te Amsterdam den wijsgeer Descartes bezocht ¹⁾. In Engeland vooral vond Comenius veel instemming en steun voor zijn streven. Tot zijne vrienden behoorde daar allereerst Samuel Hartlib, geboren te Elbing uit een Engelsche koopmansfamilie, die, na zijne studien te Cambridge (1625 en 1626), in 1629 te Londen woonde, en zich zou onderscheiden door zijne agronomische en paedagogische geschriften ²⁾. Tot zijne vrienden behoorde Joachim Hübner uit Kleef, als student in de letteren en rechten op 29 Juli 1634 ingeschreven aan de Leidsche universiteit, en opnieuw te Leiden vertoevende van October 1636 tot Mei of Juni 1637, toen hij naar Oxford vertrok en daar toezicht hield op het drukken van een door Comenius aan Hartlib gezonden handschrift, dat als *Conatuum Comenianorum Praeludia* (tweede titel: *Porta sapientiae reserata*) daar ter perse ging. Een geestverwant was Theodoor Haack, geboren in 1605 te Neuhausen bij Worms, sinds 1625 in Engeland, te Oxford van 1629 tot 1632, maar zich weldra te Londen vestigende, waar hij zich bij de presbyteriaansche kring van Hartlib aansloot.

Terwijl Haack zich meer tot de natuurkundige wetenschappen schijnt aangetrokken gevoeld ³⁾, werd de wiskunde vertegenwoordigd door John Pell. Geboren in 1610 te Southwick (Sussex), werd hij reeds in 1630 wegens zijne veelzijdige begaafdheid belast met het geven van wiskunde-lessen aan de universiteit van Oxford ⁴⁾. Weldra schijnt hij met het streven van de Londensche Milton-kring bekend geworden en zijn vak aan Comenius' plannen dienstbaar te hebben willen maken ⁵⁾. Hetzelfde jaar 1630

¹⁾ Dury is vooral bekend door zijne pogingen tot vereeniging van Lutherschen en Calvinisten, waartoe hij geheel Europa doorreisde.

²⁾ Milton droeg Hartlib zijn werk „*On education*” (1644) op, en William Petty zijn „*Advice . . . for the advancement of some particular parts of learning*” (1648). Over hem: Dircks, *A biographical Memoir of Samuel Hartlib, Milton's familiar friend etc.* (London, 1865) en Turnbull, *Samuel Hartlib. A sketch of his life and his relations to J. A. Comenius* (Oxford, 1920).

³⁾ Haack werd later een der stichters van de Royal Society.

⁴⁾ Later vertoefde Pell ook eenige jaren in Nederland, waar hij sinds December 1643 hoogleeraar in de wiskunde was aan de Illustre school te Amsterdam en in 1646 aan de nieuwe hoogeschool te Breda.

⁵⁾ Zijne in de literatuur genoemde *Tabulae directoriae ad praxin mathematicam conferentes* (1628) zijn mij onbekend gebleven.

zond Hartlib aan Dury een ruwe schets van de door Pell voorgestelde methode ter verbetering van de beoefening der wiskunde, en onder de papieren van Hartlib wordt ook een handschrift vermeld met den titel: „*Mr Pell's Idea of Mathematiques, written to S.H. Anno 1634 or m.*”¹⁾).

Ook op andere wijze ijverden Comenius' Engelsche vrienden voor de verspreiding van diens denkbeelden. Reeds tijdens het drukken der *Praeludia* koesterde Hübner de wensch om over Comenius' voorstellen het oordeel in te winnen van Descartes, die zich, na de publicatie van zijn *Discours* (1637) te Santpoort had gevestigd, maar vele relaties te Leiden behield²⁾. Een dergelijk verzoek bereikte hem wellicht door bemiddeling van Haack, die 1 April 1638 te Leiden als student was ingeschreven, en daar bevriend werd met den beroemden hoogleeraar Saumaise en den geleerden medicus Elichman³⁾. Inderdaad schreef Descartes, waarschijnlijk omstreeks denzelfden tijd als over een dergelijk over het werk van Herbert⁴⁾, en wel vermoedelijk in Juni 1638, een voorloopig *Judicium de Opere pansophico*, en, na lezing van het werk, in Augustus 1638, een vrij uitvoerigen brief aan een tot dusver onbekende (Boswell?) met een definitief oordeel⁵⁾. Het plan om al het nuttige, dat men in andere boeken vindt, in een enkel deel samen te vatten, wordt als onuitvoerbaar genoemd, en verder afgekeurd dat Comenius de geopenbaarde waarheden te zeer wil verbinden met de wetenschappen, die door het verstand worden verkregen⁶⁾.

¹⁾ Turnbull, *Hartlib, Dury and Comenius* (London, 1947), pp. 37 en 88.

²⁾ In een brief van 16 Augustus 1637 schreef Hübner van uit Oxford aan Hartlib: „Von de Cartes und seiness gleichen werd schwerlich schriftliches Judicium aus zu zwecken sein; sie seind gemeiniglich gar zu faul und wollen ihnen soviel Zeit nicht nehmen” (*Korrespondence Jana Amosa Komenského*, ed. Kvačala, dl. I (Praag, 1897), p. 30).

³⁾ Na den dood van Elichman in 1639 sprak Haack in een brief aan Saumaise van 7 Februari 1645 van „feu M^r le docteur Elichman, mon grand amy” (Parijs, Bibl. nat., f. fr. 3930, fol. 328).

⁴⁾ *De Veritate prout distinguitur a revelatione, a verisimile, a possibili et a falso* (Paris, 1624 en London, 1633), of, volgens de vertaling van Mersenne, *De la Vérité, en tant qu'elle est distincte de révélation, du vray-semblable, du possible et du faux* (Paris, 1638).

⁵⁾ De brief zal, dunkt me, in het latijn gesteld zijn, omdat hij naar Engeland werd doorgezonden. Zij is in het Fransch opgenomen in de *Oeuvres de Descartes*, ed. Adam et Tannery, t. II (1898), pp. 345—348.

⁶⁾ De verschillende verkeerde veronderstellingen gemaakt op de in de voorgaande noot geciteerde plaats, verder in *Oeuvres de Descartes*, ed. cit. t. II (1898), pp. 647—649 en t. XIbis (1913), pp. 97—98, werden verbeterd door Mahnke

Alvorens over te gaan tot Pell's verdere bemoeiingen met Comenius' plannen vermelden we eerst de denkbeelden, die van andere zijde korten tijd eerder werden voorgesteld. Naar we zeker meenen te weten geschiedde dit door Johann-Ludwig Wolzogen geboren omstreeks 1596 uit een adellijke protestantsche familie, maar die Weenen, ook al wegens godsdienstige vervolgingen, had moeten verlaten en uitgeweken was naar Polen, waar hij zich aansloot bij de Socianianen. Vrijwel onbekend was tot dusver zijn werkzaamheid als wiskundige, waarvan slechts een enkel voorbeeld uit later tijd bekend is ¹⁾. Reeds thans echter in de wiskunde ervaren, bezocht hij Comenius te Lesna en was bereid voor zijn deel de plannen te steunen. Een zijner vrienden, de diplomaat Johann-Abraham Pöhmer, berichtte Hartlib in een brief uit Weenen van 25 Maart 1638 de zaak met Wolzogen te hebben besproken, „die een groote hulp bij het werk zal zijn en zich reeds verscheidene jaren met de astronomische en meetkundige gedeelten heeft beziggehouden”, terwijl Pöhmer belooft binnen kort een proeve van Wolzogen's bemoeiingen te zullen zenden ²⁾. De voorstellen van Wolzogen meenen we te zijn neergelegd in een onuitgegeven document, dat tot titel heeft: „*Magnum opus mathematicum*” en op 23 Mei (nieuwe stijl) 1638 naar Londen gezonden werd. In een Bijlage tot dit artikel vinde de lezer dit stuk, dat ons bewaard is gebleven ³⁾. Na ontvangst kon Hartlib in een brief uit Londen van 10 Augustus 1638 aan Adolf Tassius (1585—1654) wiskundige te Hamburg, schrijven: „Des H. Wolzogen Delineation seiner Conatuum habe ich durch H. Pöhmer communication auch zu sehen bekommen. Ist ein grosses weit aussehendes Werck” ⁴⁾.

in het *Zeitschrift für Geschichte der Erziehung und des Unterrichts*, 22e Jahrg. (1932), pp. 71—78. Nadat ik ze aan den Heer Adam had medegedeeld, werden zij benut in de kleine uitgave van Descartes' Correspondentie (ed. Adam et Milhaud). Als datum van het *Judicium* is daar echter (t. III, 1941, p. 312) m.i. ten onrechte, 1639 gehandhaafd en het stuk beschouwd als betreffende onbekende papieren van Comenius.

¹⁾ Men vindt een bewijs van zijn hand voor de formule $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}$ in

het boekje, waarin Pell, in 1647, tien verschillende wederleggingen uitgaf van de cirkelkwadratuur van Longomontanus (*Controversiae de vera circuli mensura*, etc. (Amstelodami, 1647). Zie daarover de studie van Dr E. J. Dijksterhuis, *John Pell in zijn strijd over de rectificatie van den cirkel in Euclides*, jg. VIII (1932), pp. 293, waar de geleerde schrijver echter noteert (p. 296): „Over Wolzogen zijn mij geen feiten bekend”. Voor Wolzogen zie ook hierna blz. 286 en 288.

²⁾ Turnbull, o.c. (1947), p. 345.

³⁾ Londen, British Museum, ms Sloane 652, fol. 190 *recto* en *verso*.

⁴⁾ *Korrespondence Jana Amosa Komenského*, ed. Kvačala, dl. I (Praag, 1893), p. 36.

Keeren we nu terug tot de voorstellen van Pell, die hij had neergelegd in een brief aan Hartlib van 1638. Deze liet spoedig daarop den brief, op verzoek van Pell zonder vermelding van zijn naam, drukken, zoowel in het Engelsch als in het Latijn (dit laatste voor de buitenlanders), elk waarschijnlijk op een enkel groot blad ¹⁾. Zulk blad zelf is onvindbaar gebleken, maar we kennen den inhoud voldoende zeker uit twee andere zeldzame publicaties, die we voor herdrukken van Pell's schrijven houden ²⁾. Kort samengevat zegt Pell, dat wat hij tot dusver over de bevordering der wiskunde aan Hartlib heeft gezegd of geschreven, hierop neerkomt, dat de weinige vorderingen, die men heeft gemaakt zijn toe te schrijven aan gebrek aan wil, aanleg, middelen of tijd. Om hierin te voorzien, zouden de volgende middelen niet nutteloos zijn: 1°. een gids of wiskundige raadsman (*Consiliarius mathematicus*) te schrijven, die, onder anderen, een catalogus moet bevatten van de wiskundigen en hunne werken, zoowel gedrukt als in handschrift, die in de openbare bibliotheken voorhanden zijn, met aanwijzing van de soort van ieder geschrift en een chronologische catalogus van alle wiskundigen; 2°. de stichting van een openbare bibliotheek, voorzien van alle verschenen wiskundige werken en alle tot dusver uitgevonden instrumenten van allerlei soort. Verder zouden drie nieuwe werken moeten worden samengesteld: *a. Pandectae mathematicae*, die alles bevatten, wat uit de wiskunde-werken kan worden verzameld; *b. een Comes mathematicus*, wiskundig handboek met de meest noodzakelijke tafels, en *c. een Mathematicus αὐτάραχης*, of onderricht hoe een wiskundige zonder boeken en instrumenten kan komen tot een even juiste oplossing van een vraagstuk als wanneer hij een geheele bibliotheek van schrijvers zou bezitten.

¹⁾ Mersenne spreekt in zijn onder te citeeren brief van 1 November 1639 uitdrukkelijk van een „fueillet”, en, gelijk bekend, werden ook aldus, in 1640, de „*Coniques*” van Blaise Pascal gedrukt. Dat Pell's stuk oorspronkelijk een brief aan Hartlib van 1638 was, en door dezen, zonder Pell's naam, in Engelsch en Latijn werd gedrukt, zegt deze in zijn brief aan Mersenne van 21 November 1638.

²⁾ Men vindt het, onder den titel: *An Idea of Mathematics* in het Engelsch in: *The Reformed Librarie Keeper, with a Supplement to the Reformed School, as subordinate to Colleges in Universities. By John Durie. Whereunto is added: I. An Idea of Mathematics, II. The description of one of the Chiefest Libraries* (die van Wolfenbüttel) *which is in Germany. London, 1650.* En in het Latijn onder den titel: *Idea Matheseos Joannis Pellii, S. Th. D., perscripta ad S. H.* (Samuel Hartlib) in de *Philosophical Collections* (London, 1679—1682) van Hooke (no. 5, pp. 127—143).

Omtrent deze voorstellen wilde de Londensche Comenius' kring het oordeel ook van buitenlandsche geleerden vernemen. Reeds aan zijn bericht over het plan van Wolzogen in zijn brief aan Tassius van 10 Augustus 1638, kon Hartlib toevoegen: „An dessen stat schicke ich hierbey eine andere Ideam Conatum Mathematicorum eines anderen Authoris, davon ich des Hn unparteylichs Judicium mit den ersten erwarte". Niet lang daarna kwamen Pell's voorstellen ook ter kennis van den Leidschen hoogleeraar André Rivet. Door dezen medegedeeld aan Mersenne te Parijs, die wel tot oordeelen bevoegd scheen ¹⁾, antwoordde deze 20 December 1638: „Quant au discours du S^r Pell, il n'est point necessaire de faire bibliotheque telle qu'il se l'imagine, puisqu'il suppose un homme qui puisse soudre toutes sortes de problemes en ceste matiere. Il vaudroit bien mieux quitter tous les livres et que cet homme imaginaire comprist dans 2 ou 4 volumes le tout par sa methode" ²⁾. Zoowel Rivet als Mersenne schijnen echter destijds Pell's voorstel niet zelf gezien te hebben. Het zou anders wel niet noodig geweest zijn, dat Haack; zooals Hooke mededeelt ³⁾, vermoedelijk met de pas verschenen *Prodromus* van Comenius (vermeerderde uitgave der *Praeludia*) een exemplaar naar Elichman te Leiden zond, om ook over dit voorstel wederom het oordeel van Descartes te verkrijgen, maar waarvan de behandeling door het overlijden van Elichman op 10 Augustus 1639 werd vertraagd, en pas hieronder ter sprake zal komen. Een dergelijke zending, thans met voorstel van Pell in eigen vorm bereikte Mersenne in October 1639, en deze antwoordde 1 November door zoowel een brief aan Comenius als aan Haack. In de eerste verklaart hij voor het beoogde doel gaarne werken over muziek, beweging, licht en de eigenschappen van de magneet te willen zenden, en drukt Comenius op het hart de algemene geestelijke begrippen (*communes animi notiones*),

¹⁾ In 1626 had Mersenne een *Synopsis mathematica* uitgegeven, waarin kortelings de resultaten van verschillende schrijvers waren weergegeven. Te Parijs waren ook van 1634 tot 1637 de vijf eerste deelen verschenen van Herigone's *Cours mathématique démontré d'une nouvelle, briefve et claire methode* (Fransch, maar ook Latijn).

²⁾ Men zal deze en volgende te citeeren brieven vinden in een der volgende deelen van onze uitgave der *Correspondance du P. Marin Mersenne*.

³⁾ „Transmisit at Leyden quoque idem D. Theodorus Haak eandem Domini Pellii *Ideam*, una cum schedis quibusdam Comenianis ad Dominum Elichman, M.D. cujus ope et procuratione Domini Hoghelande nactus est subsequens singulare Domini Cartesii Judicium . . ." (*Philosophical Collections*, 1679—1682, no. 5, p. 144).

welke als grondslag voor het geheele werk door hem verzameld schijnen te zijn, te publiceren. Zijn oordeel over Pell's voorstel verschilt niet veel van zijn vroeger, al is het thans uitvoeriger: vele oudere en nieuwere schrijvers worden genoemd en de aandacht gevestigd op Descartes en Gassend; maar „je croy que tout ce qui appartient aux Mathematiques, tant pures que mixtes, peut estre reduit à une seule douzaine de volumes, toute la meilleure philosophie à trois, tous les arts liberaux et mechaniques à trois etc., de sorte que l'on seroit sçavant à bon conte”; bovenal prefereert hij eigen werk: als Pell „a un genie si heureux que de pouvoir luy mesme nous donner de son chef toutes les mathematiques en meilleur ordre et plus courtes et claires qu'elles n'ont esté deduites, tant s'en faut que je desire une Bibliotheque desdits volumes, qu'au contraire l'ouvrage qu'il en pourra faire tel que je dis, devroit estre retenu tout seul, sans se soucier des autres”. Dit oordeel bracht Pell zelf in het geweer, die zijn plan in een antwoord van 21 November 1639 uitvoerig toelicht, en verdedigt, zoodat Mersenne zich in brieven van 10 December 1639, zoowel aan Pell als aan Haack, zich geheel voldaan verklaart: „M. Pell m'a tellement persuadé par sa lettre que je suis entierement de son advis”, en in een schrijven aan Haack van 31 December 1639 herhaalt hij zijn aanbod van dienstbetoon aan Pell en Comenius. De laatste bekent in zijn antwoord aan Mersenne van 2 Januari 1640 met de door Mersenne aan hem gedane raadgevingen geheel accoord te gaan ¹⁾).

Nadat Descartes reeds eerder Comenius' *Prodromus* en Pell's geschrift had teruggezonden, gaf ook hij thans zijn oordeel in een door den dood van Elichman vertraagd schrijven aan zijn vriend, den medicus Hogelande, van 8 Februari 1640 ²⁾. Hij

¹⁾ De voortgezette correspondentie van Mersenne en Comenius bevat nog een belangrijke brief van Mersenne van 22 November 1640, waarin hij op de *Prodromus* terugkomt, en onder meer, de aandacht vestigt op ook een door hem ondernomen poging tot vorming van een wereldtaal als een der practische hulpmiddelen om de menschheid beter en gelukkiger te maken. Hij besluit met den wensch dat Comenius zijn pansophisch werk, dat alles wat tot dusver is gepresteerd, overtreft, moge voleindigen, en hij de wonderlijke harmonie moge aantoonen van de eindige en oneindige dingen uit welke harmonie de individueele vormen voortkomen (quâ singuli rapiantur).

²⁾ Hooke, o.c., no. 5, p. 144, herdrukt in de *Oeuvres de Descartes*, ed. Adam et Tannery, t. XIbis (Paris, 1913), pp. 1—5 (gevolgd door eene verkeerde beschouwing als zou dit stuk geheel de *Prodromus* van Comenius betreffen), en, met Fransche vertaling, in de *Correspondance Descartes*, ed. Adam et Milhaud, t. IV (1947), pp. 30—33.

onderscheidt daarin de geschiedenis (historia) van de eigenlijke wetenschap (scientia). Onder geschiedenis verstaat hij het bericht over alles wat reeds gevonden is en in boeken staat, onder wetenschap het vermogen alle problemen op te lossen en zoo door eigen werkzaamheid (industria) alles te vinden wat op het betreffende gebied door de menschelijke geest kan worden gevonden; wie zulk een wetenschap heeft, die begeert geen andere meer en verdient in den meest eigen zin den naam van *αὐτάρκης* (zich zelf genoeg), die Pell voor den waren wiskundige heeft gebruikt. Wel is waar zou het wenschelijk zijn wat te voren is gevonden en in verschillende boeken is verspreid, te verzamelen, maar een enkel deel zou voldoende zijn en niemand zal wiskundige in den waren zin worden, tenzij hij bovendien het daartoe vereischte verstand bezit en dat door lange oefening heeft gepolijst. Gelijk bekend vond Descartes de natuurphilosophie het aangewezen terrein voor het toepassen der wiskunde. Zoowel Descartes als Comenius streven naar een „scientia universalis”, die tot inzicht van alle worden en vergaan wil komen. Hier blijkt echter het groote verschil in beider opvatting: bij Descartes treedt de zelfvoldane origineele denker naar voren, bij Comenius de alomvattende syntheticus, die alle menschelijk inzicht, dat uit bloote zintuigelijke waarneming en verstandelijke conclusies spruit, als onvolkomen beschouwt. Zulk een verschil in opvatting bleek ook bij een bezoek, dat Comenius op zijn doorreis uit Engeland naar Zweden in 1642 aan Descartes te Endegeest bracht en daar een gesprek van vier uren met hem had. Maar — schreef Comenius later ¹⁾ — „wij zijn als vrienden gescheiden; ik hem aansporende tot de uitgave zijner *Principia*, die ook het volgende jaar (lees: na twee jaren, 1644) plaats vond, en hij mij aanmanende mijne gedachten te doen rijpen, er deze verklaring aan toevoegende: ik overschrijd de grenzen der philosophie niet en ook zal men met mij slechts een gedeeltelijke kennis hebben, maar met u zal men haar volledig bezitten” ²⁾. Ook later nog kantte zich Comenius, bij alle waardeering van Descartes’ wiskundige verdiensten, tegen diens opvattingen en verweet hem de geheele natuur causaal, ja zelfs zuiver wiskundig, te willen verklaren ³⁾.

¹⁾ *Continuatio admonitionis fraternae de temperando charitate zelo ... Joh. Comenii ad S. Maresium* (Amsterdam, 1669).

²⁾ „Ego ultra Philosophica non progredior, apud me igitur eorum erit pars quorum apud te totum”.

³⁾ *Cartesius cum sua naturali philosophia a mechanicis eversus* (Amsterdam, 1659) en op pp. 61—82 (zonder naam van Comenius) van Petrus Serarius’ *Res-*

Noch van Wolzogen's, noch van Pell's grootscheeps opgezette programma's zijn nadere bijzonderheden bekend. Al weten we uit zijne briefwisseling, dat de eerste nog in 1646 de *Conica* van Mydorge bestudeerde, hij zal in beslag genomen zijn door zijne studies op ander gebied, terwijl bovendien zijn zwervend leven op een rustig werken een ongunstigen invloed hebben gehad¹⁾. Op de verwezenlijking van Pell's voorstellen heeft wellicht Descartes' naar Engeland gezonden beoordeeling een nadeeligen invloed gehad, zooals ook nergens van een nauw contact tusschen beide wiskundigen blijkt; vele van Pell's voorgenomen werken (zijne uitbreiding der methode van Vieta, zijne Diophantus' uitgave en zijne Commentaren op de Geometrie van Descartes) kwamen trouwens evenmin tot uitvoering. Voor zijn programma, in wijder kring na de publicatie in 1650 bekend geworden, bleef belangstelling bestaan. Na er reeds in een brief aan Beale van 20 Augustus 1672 over gesproken te hebben²⁾, schreef Collins omstreeks 1677 in een voor Leibniz bestemden brief aan Oldenburg (gehuwd met de eenige dochter van Dury en secretaris van de Royal Society): „According to his described method (p. 43) to deduce not only all that ever is to be found in our antecessor's writings, and whatsoever they may seem to have thought on, but also all the mathematical inventions, theorems, problems, and precepts that it is possible for the working wits of our successors to light upon . . . and in p. 45, any subject being propounded, to determine the number of all the problems that can be conceived concerning it; and any problem being propounded, demonstratively to shew, either all the means of its solution, or the impossibility of it; and if so, then whether it be not yet, or not at all possible, he hath writ an exercise on this argument, entitled *Cribrum Eratho-*

ponsio ad exercitationem paradoxam Anonymi cujusdam Cartesiani sectae discipuli (Amsterdam, 1667), geciteerd in de *Antirrheticus sive Defensio contra Comenium* (Groningen, 1669) van Maresius, en bij Crenius, *Animadv. hist. et philol. pars IV* (Lugd. bat., 1699), p. 96.

¹⁾ Behalve in de Nederlanden vertoefde Wolzogen ook te Parijs (1643), in Zweden en te Bazel, terwijl hij omstreeks 1658 stierf in Silezië. Bewaard is zijn briefwisseling met Comenius, Ruarus, Adam Boreel en Mersenne. Zijne exegetische werken zijn, met zijn portret, opgenomen in de *Bibliotheca Fratrum Polonorum, Irenopoli* (Amsterdam), 1656. Met andere door Wolzogen nagelaten papieren worden zijne *Annotationes in Meditationes metaphysicas Renati Descartes* vermeld bij Sandius, *Bibliotheca Anti-Trinitariorum, Freistadii* (Amsterdam), 1684.

²⁾ *Correspondence of scientific men of the seventeenth century . . . in the collection of the Right Honourable Earl of Macclesfield*, ed. Rigaud, vol. I (1841), p. 197

stenis, of which Mr. Boyle hath had the view; and 't is his common assertion that all that hitherto have writ of Algebra, do not sweep clean, or leave large gleanings after their harvest. The said Doctor, being censorious of others, and incommunicative, himself declining discourses about his methods, was at last censured by Des Cartes for those assertions, concerning whom the Doctor never had any extraordinary esteem. And those letters or censures of Des Cartes, one Mr. Haak, an aged Dutchman, here, a member of the Royal Society, who translated the Dutch annotations on the Bible into English, hath a copy of, but, upon the account of his friendship to Dr. Pell, will not impart. We earnestly desire, if they can be procured from M. Clerselier¹⁾, or any other person, to vouchsafe transcripts thereof''²⁾. Maar, gelijk reeds bleek, Haack gaf ten slotte het oordeel van Descartes vrij, en Hooke kon het met de latijnsche versie van Pell' *Idea*, de brieven van Mersenne van 21 November en 10 December 1639 en die van Pell aan Mersenne van 21 November 1639, alles in het latijn, publiceeren in zijn reeds genoemd werk.

Teekenen we nog aan dat Comenius overleed te Amsterdam 15 November 1671 en begraven werd in de Waalsche kerk te Naarden, Pell stierf in behoeftige omstandigheden te Londen op 10 December 1685 en Haack in dezelfde plaats in 1690.

¹⁾ De uitgever van de *Lettres de Descartes* te Parijs (vol. I, 1657; vol. II, 1659 en vol. III, 1667).

²⁾ *A.w.*, vol. I (1841), pp. 246—247.

B I J L A G E

(zie blz. 277)

MAGNUM OPUS MATHEMATICUM,

i.e.

totius Arithmeticae et Geometriae absolutissimum systema, quo quicquid in isto scientiarum genere, cum ab antiquis mathematicis et philosophis, utpote Archimede, Apollonio, Euclide, Sereno, Menelao, Pappo, Theodosio, Diophanto et alijs, tam a modernis litterarum monumentis extat, aut quae aliunde a totius Europae mathematicis nova reperta impetrari potuerunt, quaeque ab ipso quoque auctore inventa sunt, methodo, quantum pro immensâ rerum varietate fieri potuit, accurata ordineque peculiari disposita, discussis omnibus difficultatum nebulis, perspicue et clare proponuntur.

Opus iis cum primis utile atque necessarium qui brevi tempore viâque regâ ad interiora divinarum Mathematicarum penetralia contendunt, et ad solidam earundem cognitionem adspirant; quippe quod non solum amplissimae Bibliothecae mathematicae, sed et in omnes antiquos Mathematicos perpetui commentarii vice, fungatur.

Mandato et sumptibus, indefesso studio et plurium annorum pertinaci industria elaboratum a J.L.W.L.B. in N. u. ¹⁾).

EEN GROOT WISKUNDIG WERK,

dat is

een zeer volledig systeem der reken- en meetkunde, waardoor alles wat in dat deel der wetenschappen, zoowel van wege de oude wiskundigen en filosofen als Archimedes, Apollonius, Euclides, Serenus, Menelaus, Pappus, Theodosius, Diophantus en anderen, als van wege de nieuweren, in geschrifte bestaat, of welke nieuwe door de wiskundigen van Europa gedane vondsten van elders bekomen hebben kunnen worden, en die, welke ook door den schrijver zelf zijn gedaan, methodisch (voor zoover dat wegens de onmetelijke veelzijdigheid der stof heeft kunnen geschieden) nauwkeurig en in bijzondere rangschikking geordend, met verdrijving van alle nevels der moeielijkheden, duidelijk en helder worden voorgesteld.

Een werk in de eerste plaats nuttig en noodig voor hen, die in korten tijd en langs den koninklijken weg, de meest verborgen geheimen der goddelijke wiskunde naspeuren en naar een solide kennis daarvan streven; en wat zonder twijfel dienst doet, niet alleen als een rijke wiskundige bibliotheek, maar ook als een doorlopend commentaar op alle oude wiskundigen.

In opdracht en op kosten van, en door onvermoeide studie en hardnekkige werkzaamheid van vele jaren uitgewerkt door J.L.W.L.B. in N.u. ¹⁾).

¹⁾ De letters kunnen nauwelijks iets anders beteekenen dan: „Johannes-Ludovicus Wolzogen, Liber Baro in Neuhaus", zooals hij ook wordt genoemd in het op blz. 281, noot 1, genoemde werk van Pell. Elders wordt er nog aan toegevoegd: „S. R. M. Poloniae et Sueciae Aulicus Cubicularis" (Kamerheer van den Koning van Polen en Zweden). Bisterfeld, die de Londensche Milton-kring had bezocht, en aan wien het stuk van Wolzogen blijkbaar was toegezonden, schreef in den herfst van 1638 van uit Parijs aan Hartlib: „Baronis Wolzogii titulum non sine delectatione vidi, sed denuo vereor, ne nudus sit titulus" (ik heb den titel van Baron Wolzogen niet zonder genoegen gezien, maar vrees weder dat het een bloote titel is) (*Korrespondence J. A. Komenského*, ed. Kvačala, t. I (Praag, 1892), p. 39).

1. Primus tomus, praeter absolutorum et surdorum numerorum perfectam tractationem, continet absolutissimum systema Magnae artis seu Analyticae (vulgo Algebra dictae), tam vulgaris quam speciosae.

2. Alter tomus Geometricus est theoreticus; plus quam ter mille Theorematum.

3. Tertius tomus Geometricus practicus est; problematum plus quam bis mille quingentorum.

4. Quartus tomus splendidissimum instrumentorum mathematicorum apparatus exhibet, et novam rationem docet cujuscunque instrumenti gradus vel partes in alias partes minutissimas secandi.

5. Quintus continet magnum canonem triangulorum ad radii taxationem 1.00000.00000.00000 et singula scrupula secunda, tantâ accuratione elaboratam, ut ne unius canonis numerus integra unitate à vero recedat.

6. Sextus tomus eundem canonem in logarithmis pari accuratione exhibebit.

(op den rug):

A Monsieur

Mons^r. Hartlib, demeurant

à

franco per Anvers

Londres

to bee delivered at Ms^r. Bournes,
booksellers shop, neere the Rojal
Exchange.

franco per

Anversa.

13/23 May 1638

De magno opere mathematico.

1. Het eerste deel bevat, behalve eene volmaakte behandeling der rationale en irrationale getallen, een zeer volledig systeem van de Grootte of Analytische kunst (gewoonlijk Algebra genoemd), zoowel wat betreft de gewone als die met letters.

2. Het tweede deel is dat van de theoretische meetkunde; meer dan driehonderd theorema's.

3. Het derde deel dat van de practische meetkunde; meer dan vijftwintighonderd vraagstukken.

4. Het vierde deel laat een zeer prachtig apparaat van wiskundige instrumenten zien, en leert een nieuwe wijze om de graden of deelen van welk instrument ook, in andere allerkleinste deelen te splitsen.

5. Het vijfde bevat een groote tafel van driehoeken tot op een straalwaarde van 1.00000.00000.00000 en enkele kleinere seconden, met zulk een nauwkeurigheid uitgewerkt, dat geen getal van eenige tafel een geheele eenheid van het ware afwijkt.

6. Het zesde deel zal, met dezelfde nauwkeurigheid, dezelfde tafel met logarithmen vertoonen.

OVER DE CONSTRUCTIE DER „PSEUDO-ELLIPS”

door

W. VAN DER WOUDE

(aan Dr H. J. E. Beth opgedragen).

Ruim veertig jaren geleden tekende ik met zorg en geduld voor mijn proefschrift een aantal figuren, waaronder ellipsen. Die figuren werden aan een vakman toevertrouwd, die zou zorgen, dat ze behoorlijk in het boekje voorkwamen. Het viel mij toen op, dat de krommen, die hij als ellipsen presenteerde, niet geheel aan de eis voldeden. Het gelukte mij niet een verklaring van hem, een gebrekkig Nederlands sprekende vreemdeling, te krijgen. Hij was overtuigd, dat zijn krommen ellipsen waren en verbaasd, dat in dit land een leraar voor wiskunde die krommen niet kende.

Een verklaring ontving ik een jaar later van een collega, die aan

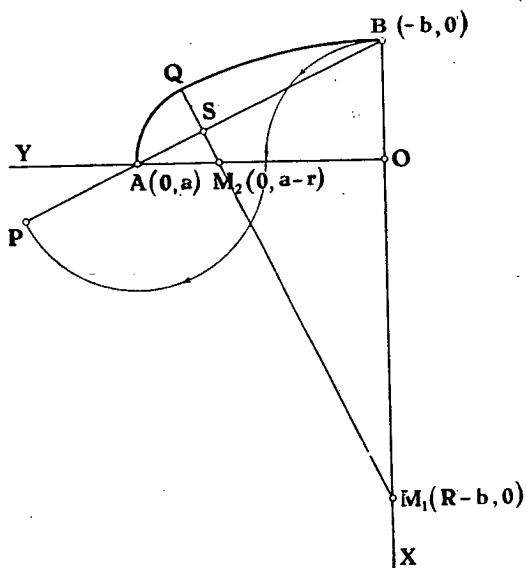


Fig. 1.

een technisch instituut les gaf. In de techniek — aldus mijn collega — vervangt men soms een ellips door 4 cirkelbogen, die men op gepaste wijze aaneen rijgt. Worden de halve assen a en b als gegeven aangenomen, dan construeert men (een vierde deel van) de „pseudo ellips” op de wijze, als hieronder wordt toegelicht (fig. 1).

Hierin is $OA \perp OB$;
 $OA = a$, $OB = b$.

Men verlengt BA met

een stuk $AP = a - b$, deelt BP in S loodrecht middendoor door een rechte, die OY — waarop A — snijdt in M_2 en OX in M_1 .

Stel $M_1B = R$, $MA = r$, dan leert een eenvoudige berekening

$$M_1M_2 = R - r.$$

Beschrijft men dus een cirkel uit M_1 met straal R en uit M_2 een cirkel met straal r , dan raken deze elkaar in een punt Q in het verlengde van M_1M_2 . De figuur der cirkelbogen BQ en QA wordt nu in de techniek gebruikt als benadering voor de boog AB der ellips.

Het valt op, dat in deze constructie een zekere willekeur schuilt.

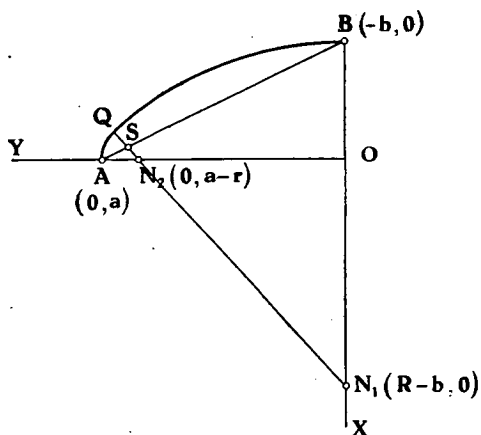


Fig. 2.

Neemt men op OX een punt N_1 aan (fig. 2), willekeurig mits niet te ver van M_1 en stellen wij weer $N_1B = R$, dan kan men daarbij wel op OY een punt N_2 vinden zó dat, als wij $N_2A = r$ stellen, voldaan is aan

$$N_1N_2 = R - r.$$

Daarvoor behoeft alleen voldaan te zijn aan $(R-b)^2 + (a-r)^2 = (R-r)^2$.

Trekken wij dan uit N_1 en N_2 weer cirkelbogen met de stralen R en r , dan zullen deze elkaar aanraken in een punt Q in het verlengde van N_1N_2 . Op die wijze ontstaat een tweede pseudo-ellips.

Zo kunnen wij dus ∞^1 pseudo-ellipsen voortbrengen. Men kan vragen welke voor het gestelde doel de meest bevredigende indruk maakt.

Op deze vraag van niet wiskundige aard kan men verschillende antwoorden geven. Maar één antwoord ligt toch wel zeer voor de hand. Het kritieke punt van de constructie ligt in Q ; daar gedraagt de raaklijn zich continu, maar de kromtestraal springt in dat punt. Wij kunnen trachten het punt N_1 en daarbij het punt N_2 zo te

bepalen, dat $\frac{r}{R}$ zo weinig mogelijk van een verschil; daarmee zijn

wij tevens weer op geheel wiskundig terrein. Daar $R > r$ is, kunnen wij ook de eis stellen, dat $\frac{r}{R}$ zo groot mogelijk moet zijn. Analytisch uitgedrukt: wij moeten R en r bepalen uit:

$$2Rr - 2bR - 2ar + a^2 + b^2 = 0 \quad (1)$$

waarbij $\frac{r}{R}$ een maximum is (2)
 (r en R positief, $R > r$).

Het is duidelijk, dat de opgave eenvoudig is. De tussen haakjes bijgevoegde eisen veroorzaken echter bij de, misschien het meest voor de hand liggende, oplossing — door differentiaalrekening de gebruikelijke eisen aan een extreem te stellen — nog enige discussie. Daarom is hier een meetkundige oplossing wel gemakkelijk.

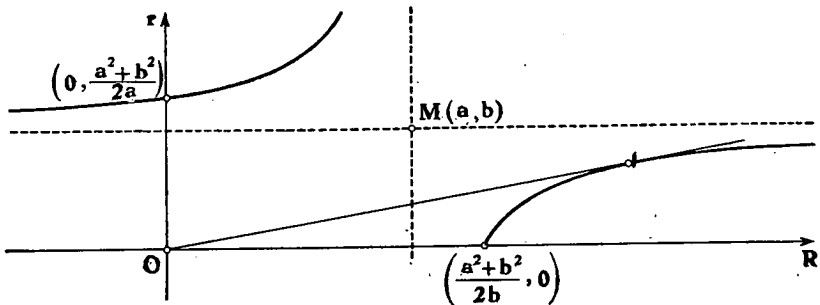


Fig. 3. Hyperbool $2rR - 2bR - 2ar + a^2 + b^2 = 0$.

Wanneer men R en r als rechthoekige coördinaten neemt, stelt (1) een orthogonale hyperbool voor. Haar middelpunt is $M(a, b)$, zij snijdt de assen in de punten

$$\frac{a^2 + b^2}{2b}, 0 \quad \text{en} \quad 0, \frac{a^2 + b^2}{2a}.$$

De asymptoten, die evenwijdig aan de assen zijn, verdelen het vlak in vier kwadranten. Bedenken wij dat

$$\frac{a^2 + b^2}{2b} > a \quad \text{en} \quad \frac{a^2 + b^2}{2a} > b,$$

dan zien wij, dat de hyperbool in het tweede en het vierde kwadrant ligt.

Op deze hyperbool moeten wij nu het punt (R, r) zo bepalen, dat de tangens van de hoek, die de voerstraal met de R -as maakt, daar een maximum heeft. Het gezochte punt is dus het raakpunt van een der beide raaklijnen, uit O aan de hyperbool getrokken en wel het raakpunt, dat in het vierde kwadrant ligt. Snijden wij de hyperbool door de poollijn van O , dan vinden wij voor de coördinaten van dat punt

$$R = \frac{1}{2b} \{a^2 + b^2 + (a-b)\sqrt{a^2 + b^2}\}, \quad r = \frac{1}{2a} \{a^2 + b^2 - (a-b)\sqrt{a^2 + b^2}\}.$$

Geven wij in fig. 2 R en r deze waarden, dan vinden wij in de eerste plaats, dat N_1N_2 in S loodrecht op AB staat en verder

$$BS = \frac{1}{2}\{\sqrt{a^2 + b^2} + a - b\}.$$

Maar daardoor is dan fig. 2 volkomen in fig. 1 overgegaan.

De in fig. 1 aangegeven constructie voldoet dus aan de hier gestelde eis, dat $\frac{r}{R}$ maximaal moet zijn.

Van Dr. W. K. Baart vernam ik, dat deze constructie nog steeds in leerboeken, in gebruik aan technische instellingen (M.T.S.), voorkomt. Het zou m.i. interessant zijn te vernemen, waar en wanneer zij in gebruik is gekomen en of het feit, dat zij aan de hier gestelde eis voldoet, een gevolg is van berekening, toeval of intuïtie.

DE BETEKENIS VAN HET MATHEMATISCH GRONDSLAGENONDERZOEK VOOR HET ELEMENTAIRE ONDERWIJS IN DE WISKUNDE

door

E. W. BETH.

Bij gelegenheid van de discussies die in de jaren 1926 en vv. zijn uitgelokt door de publicaties van de Commissie-Beth is verschillende malen aandacht geschonken aan de vraag, welke de betekenis kan zijn van het hedendaags mathematisch grondslagenonderzoek voor het elementaire onderwijs in de wiskunde. De Commissie-Beth namelijk had niet alleen, in haar door Dijksterhuis gepubliceerde „Beschouwingen over de universitaire opleiding tot leeraar in wis- en natuurkunde”, gewezen op „het gemis van filosofische, in het bijzonder kennistheoretische voorlichting over het wezen en de methoden der wis- en natuurkundige wetenschappen, dat, samen met het gemis aan historische scholing, zo vaak de ontwikkeling van dat inzicht in de grondslagen dezer wetenschappen en in hare kenmerkende onderlinge verschillen verre achter doet blijven bij de technische beheersching van hare tegenwoordige methoden”, zij had daarenboven — gedeeltelijk met goed gevolg — opneming in het leerplan bepleit van onderwerpen als: logische ontwikkeling van het getalbegrip, de bewijsmethode der volledige inductie, theorie van het irrationele getal, herziening van de grondbeginselen der vlakke meetkunde, en logische bewijzen van vroeger intuïtief aanvaarde stellingen op grond van een meer volledig stelsel van axioma's.

Het is niet mijn bedoeling, met de navolgende beschouwingen de discussies over het leerplan of over de leraarsopleiding te heropenen. Uitgaande van de stelling, dat voortzetting van de wetenschappelijke studie na voltooiing der opleiding voor de leraar reeds uit een oogpunt van geestelijke hygiene gewenst is, en van de opmerking, dat hij goed zal doen als studieterrein die onderwerpen te kiezen, die enerzijds zich boven het niveau der door hem gedoeerde leerstof verheffen, maar daarmee anderzijds toch op enigerlei wijze verband houden, zal ik betogen, dat juist het wiskundig grondslagenonderzoek voor de leraar in de wiskunde

een uitermate passend en aantrekkelijk terrein van studie vormt.

Ik ontveins me niet, dat men van studie van de grondslagen der wiskunde wel eens minder gewenste gevolgen ducht; men vreest, dat leraren er door deze studie toe zouden kunnen komen, in eerste instantie zich te richten naar een te hoog ideaal van wiskundige strengheid, en dat zij anderzijds, bemerkende, dat hun onderricht het beoogde doel niet bereikt, in arren moede het streven naar een bereikbaar strengheidspeil zouden verzaken.

Deze vrees lijkt me ongegrond; ik zou veeleer, met Dijksterhuis, willen stellen, dat men „geen Euclidische meetkunde kan doceeren, zonder de niet-Euclidische te kennen, geen drie-dimensionale, als men niet in de vier-dimensionale eenigermate thuis is”. Deze opvatting moge ik in het volgende aan de hand van concrete voorbeelden nader toelichten.

Wie het vigerend leerplan voor reken- en stelkunde met dat voor meetkunde vergelijkt, kan opmerken, dat het ten aanzien van deze beide onderdelen der wiskunde sterk divergerende methoden van axiomatisering stilzwijgend vooronderstelt. Voor de meetkunde onderstelt het, in overeenstemming met de traditie, een descriptieve axiomatisering. De meetkundige ruimte met de daarin voorhanden euclidische structuur wordt gegeven gedacht; dit gegeven wordt in een stelsel axioma's omschreven en uit deze axioma's worden de meetkundige stellingen door logische deductie verkregen. In hoeverre de onderwijspraktijk aan dit programma ener axiomatisering beantwoordt, moet beantwoorden, en kan beantwoorden, is niet de vraag, die mij hier zal bezighouden; voldoende is het, te constateren, dat het ideaal van zulk een axiomatisering — onvolkomen door Euclides, op meer volkomen wijze door Hilbert, verwerkelijkt — klaarblijkelijk de achtergrond vormt van de gebruikelijke leerwijze.

Voor de reken- en stelkunde daarentegen vooronderstelt het leerplan blijkbaar een opbouw, die ik als een genetische axiomatisering zou willen kenschetsen. Gegeven wordt slechts ondersteld het systeem der natuurlijke getallen met de daarin aanwezige rangschikking en arithmetische structuur. Door uitbreiding van dit systeem worden nu achtereenvolgens de systemen der gehele, der rationele, en der reële getallen met de in die systemen aanwezige rangschikking en arithmetische structuur voortgebracht.

Wanneer men eenmaal deze divergentie heeft opgemerkt, dan is daarmee niet alleen een uitgestrekt veld van studie, maar ook een rijk gebied van didactisch onderzoek geopend. Want het is duidelijk, dat zowel voor de reken- en stelkunde als voor de meet-

kunde systemen van axiomatisering denkbaar zijn, die afwijken van diegene, welke het bestaande leerplan stilzwijgend vooronderstelt, en die niettemin wellicht even goed of zelfs beter kunnen dienen als grondslag van een voor het middelbaar onderwijs bruikbare leerwijze.

Maar ook indien dit laatste niet het geval mocht zijn, dan zal een vergelijkende beschouwing van de verschillende methoden van axiomatisering de leraar een dieper inzicht geven in de leerstof, die hij zijn leerlingen moet bijbrengen; soms zelfs zal zij hem een onverwachte verklaring verschaffen van de moeilijkheden, waartoe de behandeling van bepaalde onderwerpen aanleiding blijkt te geven. Dit moge nader blijken uit het nu volgende voorbeeld.

Ik ga daarbij uit van de resultaten van metalogische onderzoekingen van C. H. Langford (1927) en A. Tarski (1936) over de theorie van de rangschikking. We beschouwen de rangschikking die onderscheidenlijk bestaat in de systemen (a) der natuurlijke getallen, (b) der gehele getallen, (c) der rationele getallen, en (d) der reële getallen. Om redenen, die later duidelijk zullen worden, trachten we deze verschillende wijzen van rangschikking (of ordetypen) te beschrijven met behulp van logische symbolen.

De zinsneden „ x is kleiner dan y ” en „ x is gelijk aan y ” zullen we opvolgend weergeven door:

$$x < y \qquad x = y$$

de woorden en uitdrukkingen „niet”, „of”, „en”, „als ... dan” en „dan en dan alleen, als” opvolgend door

$$\neg, \quad \vee, \quad \&, \quad \rightarrow, \quad \leftrightarrow$$

en de zinswendingen „voor elke x geldt”, „voor elke y geldt”, ..., „er is een x zodanig dat”, „er is een y zodanig dat”, ... opvolgend door

$$(x), \quad (y), \quad \dots, \quad (Ex), \quad (Ey), \quad \dots$$

De algemene eigenschappen van de rangschikking kunnen we dan uitdrukken door de formules:

- (1) $(Ex)(Ey)[x < y] \underline{\hspace{1cm}}$
- (2) $(x)(y)[x < y \rightarrow y < x]$
- (3) $(x)(y)(z)[x < y \ \& \ \underline{z < y} \rightarrow x < z]$
- (4) $(x)(y)[x = y \leftrightarrow (x < y \ \& \ \underline{y < x})]$

die als volgt kunnen worden gelezen:

- (1) „er is een x en een y zodanig dat x kleiner is dan y ”
- (2) „voor elke x en y geldt: als x kleiner is dan y , dan is y niet kleiner dan x ”
- (3) „voor elke x , y en z geldt: als x kleiner is dan y , en z niet kleiner dan y , dan is x kleiner dan z ”
- (4) „voor elke x en y geldt: x is gelijk aan y , dan en dan alleen, als x niet kleiner is dan y en y niet kleiner dan x ”

Deze formules gelden blijkbaar gelijkelijk voor de ordetypen (a), (b), (c) en (d). We gaan nu echter zoeken naar formules, die niet voor alle beschouwde ordetypen gelden en die dus kunnen dienen om de tussen deze ordetypen bestaande verschillen te beschrijven.

Daartoe merken we, om te beginnen, op dat de ordetypen (a) en (b) discreet, de ordetypen (c) en (d) daarentegen dicht zijn; d.w.z., voor de ordetypen (a) en (b) gelden de formules:

$$(5) \quad (x)\{(\overline{E}y)[x < y] \vee (Ez)[x < z \ \& \ (\overline{E}y)\{x < y \ \& \ y < z\}]\}$$

$$(6) \quad (x)\{(\overline{E}y)[y < x] \vee (Ez)[z < x \ \& \ (\overline{E}y)\{z < y \ \& \ y < x\}]\}$$

terwijl voor de ordetypen (c) en (d) geldt de formule:

$$(7) \quad (x)(y)[x < y \rightarrow (Ez)\{x < z \ \& \ z < y\}]$$

Verder merken we op, dat in het ordetype (a) een kleinste element voorkomt, wat in het ordetype (b) niet het geval is; voor ordetype (a) geldt derhalve de formule:

$$(8) \quad (E x)(y)[x = y \vee x < y]$$

terwijl voor ordetype (b) geldt:

$$(9) \quad (x)(E y)[y < x]$$

We vatten nu de tot dusverre gevonden resultaten in een tabel samen.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
(a)	+	+	+	+	+	+	—	+	—
(b)	+	+	+	+	+	+	—	—	+
(c)	+	+	+	+	—	—	+	—	+
(d)	+	+	+	+	—	—	+	—	+

Blijkbaar ontbreken ons nog slechts formules die het verschil tussen de ordetypen (c) en (d) beschrijven.

Bij nader onderzoek komt vast te staan, dat zulke formules er niet zijn. Dat wil zeggen: elke formule van de hier beschouwde soort, die voor het ordetype (c) geldt, geldt ook voor het ordetype (d), en omgekeerd.

Hoewel het ons te ver zou voeren, wanneer we van deze stelling een streng bewijs wilden leveren, kunnen we toch achteraf het op het eerste gezicht verrassende resultaat wel verklaren. Bij de kenmerken, die ons toestaan, de ordetypen (a) en (b) van elkaar en van de ordetypen (c) en (d) te onderscheiden, zijn steeds slechts een eindig aantal elementen van de beschouwde systemen betrokken. Het systeem (a) onderscheidt zich van alle andere, doordat het een kleinste element, te weten het getal 1, bevat. Het systeem (b) onderscheidt zich van de systemen (c) en (d), doordat het paren elementen p en q bevat, zodanig, dat er geen elementen meer kunnen worden gevonden, die tussen p en q in gelegen zijn. Van deze eigenaardigheden van de beschouwde systemen hebben we bij het opstellen van onze formules gebruik gemaakt.

Bij de kenmerken, die ons toestaan, de ordetypen (c) en (d) te onderscheiden, daarentegen, zijn altijd oneindig veel elementen van de systemen (c) en (d) betrokken. Zulk een kenmerk wordt bijvoorbeeld aangewezen door de stelling van de bovenste grens: is er voor een verzameling u van reële getallen een reëel getal x met de eigenschap, dat elk tot u behorend getal y gelijk is aan of kleiner is dan x , dan is er een kleinste getal z , dat deze eigenschap bezit.

Zolang we alleen eindige verzamelingen beschouwen, geldt deze stelling evenzeer voor het systeem der rationele getallen; er ontstaat pas verschil, wanneer we oneindige verzamelingen van getallen beschouwen, bijvoorbeeld de verzameling van de getallen welker kwadraat kleiner is dan 2. De stelling van de bovenste grens geldt dan niet langer voor het systeem der rationele getallen, maar wel voor het systeem der reële getallen.

Hetzelfde resultaat vindt men, als men in plaats van de stelling van de bovenste grens bijvoorbeeld het convergentiebeginsel van Cauchy beschouwt.

We merken even op, dat een overeenkomstig resultaat van kracht is, als we naast de rangschikking van de beschouwde systemen ook hun arithmetische structuur in ons onderzoek betrekken.

Samenvattend kunnen we dus vaststellen, dat men, om de kenmerkende eigenschappen van het systeem der reële getallen te beschrijven, noodzakelijk oneindige verzamelingen van reële getallen in zijn beschouwingen moet betrekken, wat niet nodig is, zolang men alleen te maken heeft met de systemen der natuurlijke, der gehele en der rationele getallen.

De didactische consequenties van onze beschouwingen liggen

voor de hand. Het is duidelijk, dat de eigenaardige moeilijkheden, die zich voordoen bij de overgang van het systeem der rationele getallen naar dat van de reële getallen, moeilijkheden, die men niet ontmoet bij de overgang van het systeem der natuurlijke naar dat van de gehele of van het laatste naar het systeem der rationele getallen, maar die terugkeren bij de behandeling van het limietbegrip, het is duidelijk, dat deze moeilijkheden in beginsel onvermijdelijk zijn; want er is geen enkele enigermate adequate behandeling van de fundamentele eigenschappen van het systeem der reële getallen denkbaar, waarbij niet op een of andere wijze oneindige verzamelingen van reële getallen ter sprake worden gebracht. Ook in dit geval kan het grondslagenonderzoek alleen een aanknopingspunt leveren voor verder didactisch onderzoek; maar het komt mij voor, dat ook hier alleen het grondslagenonderzoek bij machte is, de richting aan te wijzen, waarin men de oplossing te zoeken heeft van de didactische problemen, waarvoor het vigerend leerplan de leraar stelt. Het komt me voor, dat de eenzijdig aan de psychologie georiënteerde didactiek, die tegenwoordig zoveel aanhangers telt, tegenover dit vraagstuk volkomen machteloos staat.

I N H O U D.

	Blz.
P. WIJDENES, Dr H. J. E. Beth 70 jaar	239
J. VAN ANDEL, Dr H. J. E. Beth	240
Prof. Dr O. BOTTEMA, Dr H. J. E. Beth 1880—1950	241
Prof. Dr O. BOTTEMA, Over de kinematische afbeelding volgens Beth en haar toepassing op de centrale drijfstangbeweging	253
Prof. Dr H. BREMEKAMP, Over gebondenheid en vrijheid van de docent	257
Dr E. J. DIJKSTERHUIS, Descartes, Pascal en de proef op den Puy de Dôme	265
Dr F. DE KOK, Numerieke integratie	271
Prof. Dr C. VISSER, Beginselen der goniometrie	274
C. DE WAARD, Wiskundige bijdragen tot de Pansophie van Comenius	278
Prof. Dr W. VAN DER WOUDE, Over de constructie van de pseudo-ellips	290
Prof. Dr E. W. BETH, De betekenis van het mathematisch grondslagen- onderzoek voor het elementaire onderwijs in de wiskunde	294
Inhoud	300

Wiskundige Werken

van

Dr H. J. E. BETH

Beknopt leerboek der cosmographie met 32 tekeningen in de tekst 4e druk f 1,25

Meetkunde van de ruimte.

Een leerboek voor stereometrie en beschrijvende meetkunde voor het M.O., 180 blz., 189 fig. f 3,05

Dr H. J. E. Beth en Dr P. J. van Loo.

Mechanica voor het M.O. met vraagstukken 6e druk

203 blz., 97 fig. f 3,90

Antwoorden f 0,53

Inleiding tot de Differentiaal- en integraalrekening met vele toepassingen 5e druk ter perse. 430 blz.,

133 fig. f 13,50 geb. f 16,—

Antwoorden f 1,—

Meetkundige toepassingen van de differentiaalrekening, 53 blz. 30 fig. f 1,90

Inleiding tot de Niet-Euclidische meetkunde op historische grondslag, 214 blz., 77 fig. f 4,70

Newton's Principia.

I 180 blz. 32 fig. f 4,45

II 156 blz. 39 fig. f 4,45

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-DJAKARTA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel

NIEUWE SCHOOL-ALGEBRA

DOOR

Dr H. J. E. BETH

TE AMERSFOORT

EN

P. WIJDENES

AMSTERDAM

- | | |
|-------------------------------|------------------------|
| I. Negentiende druk ter perse | 156 blz. 21 fig. f 3,— |
| II. Zeventiende druk | 204 blz. 50 fig. f 3,— |
| III. Elfde druk | 198 blz. 60 fig. f 3,— |

Deel I en II geven de volledige stof voor de klassen 1, 2 en 3 van de H.B.S., deel III voor de 4e en 5e van de H.B.S. B.

Voor de 4e en 5e van de H.B.S. A.

P. WIJDENES en Dr P. G. VAN DE VLIET

ALGEBRA VOOR DE H.B.S. A.

Vijfde druk. 164 blz. 20 fig. f 2,90.

Voor Gymnasia en Lycea:

Klassen I—IV: Nieuwe Schoolalgebra I, II, zonder de reeksen

V α en VI α Nieuwe Schoolalgebra III α

V β en VI β Nieuwe Schoolalgebra III

Voor het Staatsexamen:

Voor α de delen I, II, III α

Voor β de delen I, II, III.

Voor leraren, die deze boeken op hun school gebruiken, zijn de antwoorden gratis beschikbaar; bovendien bij P. Wijdenes de volledige uitwerkingen van de logarithmenvraagstukken in 4 en in 5 decimalen.

Dr H. J. E. BETH.

Tafels in vier decimalen, benevens gegevens op verschillend gebied, voor schoolgebruik 3e druk f 0,60.

Uitgave P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN—DJAKARTA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.